Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Kapitel: 4, 1. Les épreuves de Student.
Autor: Breny, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36341

On calcule et vérifie $\mathfrak{S}$ comme ci-dessus, puis:

$$x\underline{a}_1 = n \qquad y a_1 + u \underline{a}_2 = p \qquad z a_1 + v a_2 + w \underline{a}_3 = q$$

$$\mathrm{A} = a_1 + a_2 + a_3 \qquad \mathrm{T} = n + p + q \qquad t a_1 + r a_2 + s a_3 = \mathrm{T}$$

$$c_1 = x \qquad c_2 = y + u \qquad c_3 = z + v + w$$

$$w \underline{b}_3 = a_3 \qquad v b_3 + u \underline{b}_2 = a_2 \qquad z b_3 + y b_2 + x \underline{b}_1 = a_1$$

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = \mathrm{A}$$

$$SCN = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

4. Exemples.

4, 1. *Les épreuves de Student.*

4, 11. Soit $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ un échantillon simple et fortuit d'une population normale de moyenne μ et écart-type σ. La théorie des modèles linéaires s'applique ici, avec

$$r = p = 1 \ , \qquad \mathfrak{A} = \| 1, \ldots, 1 \| \qquad \mathfrak{b}_H = \| \mu \| \ ,$$

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{A} = \| n \| \ , \qquad \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = \sum_1^n \mathbf{x}_i \ ,$$

et le système normal se réduit à

$$n \hat{\mu} = \sum_1^n \mathbf{x}_i \ , \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbf{x}_i = \mathbf{m} \ .$$

On a alors

$$\mathbf{SC}N = \left(\sum \mathbf{x}_i\right)^2/n \ , \qquad \mathbf{SC}T = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 \ ,$$

$$\mathbf{SC}E = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 - \left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\right)^2/n = \sum_1^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^2 = \frac{n \sum_1^n - \mathbf{x}_i^2 \left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\right)^2}{n} .$$

Si $\mu = a$, l'expression

$$\frac{(\mathbf{m} - a)\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(\mathbf{SC}E/n)}} = \sqrt{(n-1)}\ \frac{\sum_1^n \mathbf{x}_i - n a}{\sqrt{(n\,\mathbf{SC}E)}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-1}$; $\mathbf{SC}E/\sigma^2$ est une aléatoire χ^2_{n-1} .

4, 12. Soit $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q)$ un échantillon simple et fortuit d'une population normale de moyenne μ_1 et écart-type σ, $(\mathbf{x}_{q+1}, \ldots, \mathbf{x}_n)$ un échantillon simple et fortuit d'une population normale de moyenne μ_2 et écart-type σ, les deux échantillons étant mutuellement indépendants. La théorie des modèles linéaires s'applique encore:

$$\mathbf{E} \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_q \\ \mathbf{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Vmatrix},$$

$$r = p = 2 , \qquad \mathfrak{b}_H^T = \| \mu_1, \mu_2 \| , \qquad \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} q & 0 \\ 0 & n - q \end{Vmatrix} .$$

Si on pose

$$\sum_1^q \mathbf{x}_i^s = \mathbf{S}_{1,s} , \qquad \sum_{q+1}^n \mathbf{x}_i^s = \mathbf{S}_{2,s} ,$$

on a

$$\hat{\mu}_1 = \mathbf{S}_{1,1}/q , \qquad \hat{\mu}_2 = \mathbf{S}_{2,1}/(n - q) ,$$

$$\mathbf{SC}E = \frac{q\,\mathbf{S}_{1,2} - (\mathbf{S}_{1,1})^2}{q} + \frac{(n - q)\,\mathbf{S}_{2,2} - (\mathbf{S}_{2,1})^2}{n - q} ,$$

de sorte que, sous l'hypothèse $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$, l'expression

$$\frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \Delta)\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n-q}\right)\mathbf{SC}E\right]}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-2}$; $\mathbf{SC}E/\sigma^2$ est une aléatoire χ^2_{n-2} .

4, 2. *Problèmes de régression.*

4, 211. Supposons que, $u_1, \ldots, u_s$ étant des constantes certaines deux à deux distinctes, on ait $n = \Sigma_1^s k_i$ variables aléatoires $\mathbf{x}_{i,j}$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, k_i)$, normales, de variance commune σ^2, indépendantes, avec

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x}_{i,j} = \alpha + \beta u_i . \tag{17}$$