Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE
Autor: Quan, Pham Mau
Kapitel: I. L'espace-temps.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36343

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

par Pham Mau Quan.

(Reçu le 28 janvier 1961).

1. L'espace-temps.

1. *Introduction.*

Historiquement la théorie de la relativité restreinte est née de l'échec des expériences que Michelson entreprit en 1881 pour montrer la dépendance de la vitesse de la lumière vis-à-vis du mouvement de l'observateur par rapport à un éther hypothétique. Cette vitesse mesurée est la même quel que soit le mouvement de l'observateur. Ce résultat négatif a reçu des essais d'explication par Lorentz, Minkowski, Einstein et c'est Einstein qui a formulé les bases de la théorie de la relativité restreinte en posant le principe de constance de la vitesse de la lumière dans le vide. En réalité c'est une prise de position du point de vue mathématique devant le fait déjà signalé par Poincaré que les équations de la mécanique et les équations de l'électromagnétisme sont invariantes dans deux groupes de transformations différents: le groupe de Galilée et le groupe de Lorentz.

Comme le principe de constance de la vitesse de la lumière est virtuellement contenu dans les équations de Maxwell, pour résoudre ce conflit entre mécanique et électromagnétisme classiques, Einstein proposa de conserver la théorie électromagnétique de Maxwell et de modifier la dynamique newtonienne de façon à la mettre en accord avec la première. Pour cela il prit comme point de départ les deux principes suivants déduits des résultats de l'expérience de Michelson et des travaux de Lorentz:

Principe I. — *Par rapport à tous les repères de Galilée, dans le vide et dans tous les sens, la vitesse de la lumière est la même. Cette vitesse constante* c *voisine de 300.000 km/sec, est la vitesse limite des phénomènes physiques observables.*

Principe II. — *Aucune expérience physique, mécanique ou électromagnétique, faite à l'intérieur d'un repère de Galilée, ne doit permettre de mettre en évidence le mouvement de ce repère de Galilée par rapport à un autre.*

Ce sont les conséquences mathématiques de ces deux principes qui constituent la théorie de la relativité restreinte. Le premier principe montre que l'espace et le temps possèdent un caractère relatif, et conduit à définir à partir de l'existence du groupe de Lorentz, une structure géométrique pour la variété espace-temps à quatre dimensions. Le second principe conduit à donner aux équations de la mécanique et de l'électromagnétisme une forme géométrique indépendante de tout système de coordonnées choisi pour rapporter l'espace-temps, de façon à ce qu'elles restent en particulier invariantes par les transformations de Lorentz.

2. *L'espace-temps de* Minkowski.

L'espace-temps est une variété différentiable à quatre dimensions V_4 sur laquelle est définie une métrique improprement euclidienne de signature hyperbolique normale $(+ - - -)$. Rapportée à des coordonnées orthonormales (x_α), cette métrique a la forme

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{2. 1}$$

où $x_0 = ct$, t étant la variable temps classique et c la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est l'espace-temps de Minkowski. Les coordonnées orthonormales (x_α) sont appelées *coordonnées lorentziennes*. Le repère associé s'appelle *repère lorentzien*. L'axe des x_0 est l'axe de temps et le 3-plan (x_1, x_2, x_3) l'espace associé. Nous réservons le terme « repère galiléen » à tout repère du 3-plan espace en mouvement de translation rectiligne uniforme au sens classique. Les variables (t, x_1, x_2, x_3) sont dites coordonnées galiléennes.

Il résulte de ces définitions et des principes I et II les énoncés suivants.

1. *Les changements de coordonnées lorentziennes permis sont ceux qui laissent invariante la forme quadratique fondamentale* (2. 1). Ils forment le *groupe de Lorentz*.

L'espace et le temps sont relatifs à chaque repère lorentzien et diffèrent d'un repère à un autre. Leurs relations sont définies par les formules de transformations de Lorentz.

2. *Le déplacement d'une onde lumineuse est telle que* $ds^2 = 0$. Sa vitesse est donc invariante par changement de repère (c'est c).

Toute vitesse réelle est inférieure à celle de la lumière, donc telle que $ds^2 > 0$.

3. Le principe II entraîne que *toute loi mécanique ou électromagnétique s'exprime par une équation invariante par changement de repère* (ou indépendante du choix des coordonnées de V_4) et a fortiori invariante par les transformations du groupe de Lorentz. C'est ce qui conduit à l'expression tensorielle des grandeurs en relativité.

3. *Le groupe de transformations de Lorentz.*

Les transformations de Lorentz laissent invariante la forme quadratique fondamentale $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On démontre qu'à une translation près, ce sont des transformations linéaires de matrice $a = (a_{\lambda\alpha})$

$$x'_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda_\alpha} x_\alpha \qquad \text{ou} \qquad x' = ax$$

telles que

$${}^t x' \eta\, x' = {}^t(ax)\, \eta\, (ax) = {}^t x\, {}^t a\, \eta\, ax = {}^t x\, \eta\, x,$$

soit

$$(3.\ 1) \qquad {}^t a\, \eta\, a = \eta,$$

où $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ est la matrice d'éléments $\eta_{00} = +1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Ces transformations forment le groupe dit général de Lorentz. En fait on se limite à des transformations propres qui conservent l'orientation du temps et l'orientation de l'espace: elles sont telles que

$$(3.\ 2) \qquad a_{00} \geq 1 \quad \text{et} \quad \det a = +1\ .$$

Elles forment le groupe propre de Lorentz sous-groupe du groupe général.

A toute transformation de coordonnées x_α correspond un changement de repère lorentzien qui leur est associé. On voit alors que par des rotations purement spatiales ($\vec{e}_0$ et $\vec{e}_0'$ restent fixes), on peut amener $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_1'$ dans le 2-plan ($\vec{e}_0$, $\vec{e}_0'$), $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ en $\vec{e}_2'$ et $\vec{e}_3'$. Autrement dit, toute transformation propre de Lorentz peut être réalisée comme produit de transformations spatiales pures (ne portant que sur les x_i) et d'une transformation dite *spéciale de Lorentz* de la forme

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00}\, x_0 + a_{01}\, x_1 \\ x_1' &= a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \,. \end{aligned}$$

En exprimant les conditions (3. 1) et (3. 2), on trouve

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0\, Ch\varphi - x_1\, Sh\varphi \\ x_1' &= -x_0\, Sh\varphi + x_1\, Ch\varphi \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

φ désignant un paramètre. Ces formules traduisent une rotation d'argument φ dans le plan hyperbolique (x_0, x_1). La transformation inverse de (3. 3) s'en déduit immédiatement. On peut encore introduire le nombre $\beta = Th\varphi$ ($-1 \leqslant \beta \leqslant +1$) et écrire ces transformations sous la forme devenue classique:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x_0' &= \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_1' &= \frac{-\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} x_0 &= \frac{x_0' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_1 &= \frac{\beta x_0' + x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_2 &= x_2' \\ x_2 &= x_2' \end{aligned} \tag{3.4}$$