

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES
Autor: Chabauty, Claude
Kapitel: I. RÔLE DES NOTIONS GEOMETRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMETIQUE,
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37952>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES¹⁾

par Claude CHABAUTY

I. RÔLE DES NOTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

Considérons les énoncés suivants :

- (A). Si deux entiers sont chacun somme de deux carrés d'entiers, leur produit est aussi somme de deux carrés d'entiers.
- (B). Soit d un nombre naturel non carré, l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ admet une infinité de solutions en entiers x, y .
- (C). Soit $ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme quadratique [à coefficients entiers], il existe un système d'entiers x, y , non tous deux nuls tels que

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 \leq \frac{4}{3} |ac - b^2| .$$

- (D). Soit θ un nombre réel, il existe une infinité d'entiers x, y , $y \neq 0$, tels que

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}y^2} .$$

Les énoncés (A) et (B) sont purement algébriques (c'est-à-dire ne font intervenir que les lois de composition $+$ et \times de l'anneau des entiers). L'énoncé (D), à l'opposé, a visiblement un caractère géométrique, puisqu'il fait intervenir le continu des nombres réels, mais l'énoncé (C) aussi, car il s'agit de démontrer une inégalité, c'est-à-dire une relation d'ordre, et non une relation algébrique. En outre, il s'agit en fait dans (C) d'une propriété valable pour les formes quadratiques binaires, à coefficients réels quelconques, et se restreindre aux coefficients entiers

¹⁾ Exposé fait durant les Journées mathématiques, organisées par la Société mathématique de France, à Grenoble, mai 1960.

ne simplifie en rien la démonstration. Remarquons que si on suppose la forme indéfinie on peut alors montrer que le coefficient $\frac{4}{3}$ peut être remplacé par le coefficient $\frac{4}{5}$, et que l'inégalité a une infinité de solutions entières. Il est clair que l'énoncé (D) est alors un corollaire de ce résultat sur les formes indéfinies que nous noterons (C'), puisque le discriminant de $y(x - \Theta y)$ est $-\frac{1}{4}$.

D'autre part, appliquons à la forme à coefficients entiers $x^2 - dy^2$ de (B), l'énoncé (C'). Il nous assure immédiatement l'existence d'un entier h , $h \neq 0$ parce que d n'est pas carré, tel que l'équation $x^2 - dy^2 = h$ ait une infinité de solutions en entiers x, y . Or un calcul élémentaire ¹⁾ permet de construire à partir de telles solutions avec $x \equiv x' \pmod{h}$, $y \equiv y' \pmod{h}$, une solution en entiers à $x^2 - dy^2 = 1$.

L'énoncé algébrique (B) a donc une démonstration basée sur un énoncé (C') à caractère géométrique et en fait c'est la démonstration la plus naturelle et la plus classique, à des variantes près.

(La valeur de la constante, $\frac{4}{3}$, ou $\frac{1}{5}$, dans (C') n'a pas d'importance pour cette démonstration de (B), ce qui compte c'est qu'il y ait une constante pour laquelle l'inégalité ait une infinité de solutions entières.)

Par contre, l'énoncé algébrique (A) a évidemment sa démonstration la plus simple et la plus naturelle à partir de l'identité bien connue: $(u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2) = (uu' + vv')^2 + (uv' - vu')^2$. Pour certains énoncés algébriques, il y a la possibilité de démonstrations algébriques et de démonstrations géométriques.

Dans cet exposé nous nous intéresserons aux problèmes d'arithmétique à caractère géométrique. On vient de voir sur un exemple ²⁾ que le champ de leurs applications comprend certains problèmes d'arithmétique dont l'énoncé a un caractère algébrique.

¹⁾ L'équation $(x + y\sqrt{d})(X + Y\sqrt{d}) = x' + y'\sqrt{d}$ définit des entiers X, Y avec $X^2 - dY^2 = 1$.

²⁾ Plusieurs des théorèmes de base de la Théorie des Nombres algébriques ont été obtenus ainsi. Voir, par exemple, A. CHATELET: *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, où l'aspect géométrique est souligné.