

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOTOPIE UND HOMOLOGIE
Autor: Eckmann, Beno
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37962>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

HOMOTOPIE UND HOMOLOGIE

Von Beno ECKMANN

In diesem Vortrag¹⁾ wird dargelegt, wie sich die Begriffe und Sätze der Homotopie- und der Homologietheorie in einheitlicher Form aus einem umfassenden Begriff herleiten lassen. Dieser ist insofern geometrischer Natur, als er die Menge der Homotopieklassen $\Pi(A, B)$ der Abbildungen²⁾ des Raumes A in den Raum B zum Ausgangspunkt und zum eigentlichen Gegenstand der Untersuchung macht; diese Menge kann bei festem A als Funktor von B aufgefasst werden, der zur Untersuchung von B dient, oder, bei festem B als Funktor von A — die beiden Auffassungen sind dual zueinander im Sinne der Dualität, die im Umkehren der Abbildungsrichtung besteht. Spezielle Wahl des Testraumes A ergibt die Homotopiegruppen, spezielle Wahl von B die Cohomologiegruppen; diese beiden Gruppen stehen somit in einer einfachen Dualität zueinander. Die Dualität ist zunächst nur heuristischer Natur, da kein allgemeines Prinzip zur Verfügung steht, welches garantiert, dass mit einem Satz auch der duale richtig ist, und dieser muss erneut bewiesen werden. Jedoch ist zum mindesten die Formulierung des dualen Satzes stets dann eindeutig möglich, wenn der Ausgangssatz gänzlich mit Hilfe von Abbildungen bzw. Abbildungsklassen formuliert war (und in einem gewissen Rahmen lässt sich auch das ganze Beweisverfahren dualisieren, bzw. vereinheitlichen, vergl. P. J. Huber [5]; hier soll dieser Aspekt allerdings nicht zur Sprache kommen). Die Dualität versagt dann, wenn spezielle Räume, Punkte, usw. verwendet werden; allgemeine Abbildungsergebnisse lassen sich auch auf diese Fälle spezialisieren, aber dass etwa die Struktur der resultierenden Gruppen immer noch dual sein sollte, darf im allgemeinen nicht erwartet

¹⁾ Internationales Kolloquium über Differentialgeometrie und Topologie (Zürich, Juni 1960).

²⁾ Es handelt sich durchwegs um Räume mit Basispunkt und Abbildungen und Homotopien, welche die Basispunkte respektieren.

werden. Die angedeuteten allgemeinen Resultate, die neues Licht auf die Beziehungen zwischen Homologie und Homotopie werfen, haben vor allem die Gestalt exakter Folgen und damit verknüpfter Isomorphismen, welche alle die $\Pi(A, B)$ oder von ihnen abgeleitete Gruppen betreffen, und von diesen ist im folgenden die Rede. Sie sind in Zusammenarbeit mit P. J. Hilton entwickelt worden und grösstenteils an anderer Stelle ausführlich dargestellt [1, 2, 4].

1. DIE GRUPPEN $\Pi_n(A, B)$.

Die Menge $\Pi(A, B)$ besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich A — d.h. bei festem B als Funktor von A — falls B ein gruppenähnlicher Raum ist (d.h. ein Raum mit einer Multiplikation $m: B \times B \rightarrow B$, welche bis auf Homotopie die Gruppenaxiome erfüllt), und nur in diesem Falle. Sie besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich B bei festem A , wenn A mit einer Comultiplikation versehen ist, d.h. mit einer Abbildung $m': A \rightarrow A \vee A$ mit den dualen Axiomen (vgl. [1]). Dies ist insbesondere der Fall für $B = \Omega Y$, den Schleifenraum von Y , oder für $A = \Sigma X$, die Suspension von X . Zwischen $\Pi(\Sigma X, Y)$ und $\Pi(X, \Omega Y)$ besteht eine natürliche, d.h. mit allen Abbildungen verträgliche Isomorphie, und man kann diese Gruppen ohne Schaden identifizieren; durch Iteration erhält man die Gruppen

$$\Pi_n(A, B) = \Pi(\Sigma^n A, B) = \Pi(\Sigma^{n-k} A, \Omega^k B), \quad 0 \leq k \leq n$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$, wobei es für $1 \leq k \leq n-1$ gleichgültig ist, welche der gruppenbildenden Strukturen man verwendet. Sie sind covariante Funktoren von B , contravariante von A ; für $n \geq 2$ sind sie stets Abelsche Gruppen [1]. Wählt man für A die Sphäre S_{m-n} , so ist $\Pi_n(A, B) = \pi_m(B)$ die m -te Hurewicz'sche Homotopiegruppe; wählt man für B den Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, m+n)$, wo G eine Abelsche Gruppe ist, so ist $\Pi_n(A, B) = H^m(A; G)$ eine homotopisch definierte Cohomologiegruppe, die für Polyeder A mit der üblichen (etwa der singulären) übereinstimmt, wie man z.B. von der Erweiterungstheorie der Abbildungen her weiss.

Eine Abbildung $\beta : B \rightarrow B'$ induziert Homomorphismen $\beta_* : \Pi_n(A, B) \rightarrow \Pi_n(A, B')$, $n = 1, 2, 3, \dots$; diese lassen sich verknüpfen durch „relative“ Gruppen $P_n(A, \beta)$ und eine *exakte* Sequenz (Definition der P_n sowie von J und ∂ vgl. [1, 3])

$$\dots \rightarrow \Pi_n(A, B) \xrightarrow{\beta_*} \Pi_n(A, B') \xrightarrow{J} P_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots;$$

wir fassen diese in evidentester Weise in ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Pi_*(A, B) & \xrightarrow{\beta_*} & \Pi_*(A, B') \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \beta) & \end{array}$$

zusammen, wobei Π_* bzw. P_* die direkte Summe der Π_n bzw. P_n ist und β_* und J als Homomorphismen vom Grade 0, ∂ vom Grade -1 aufzufassen sind. Für die relative Gruppe $P_*(A, \beta)$, die zum Testraum A und zur Abbildung β gehört, gilt die *Exzisionseigenschaft* für Faserungen, wie sie im Spezialfall der π_n wohlbekannt ist: Ist β eine Faserabbildung (im Sinne des „covering homotopy theorem“) mit Faser B_0 , so hängt $P_*(A, \beta)$ nur von B_0 ab; das exakte Dreieck ergibt dann einen natürlichen Isomorphismus vom Grade -1

$$P_*(A, \beta) \cong \Pi_*(A, B_0).$$

Die duale Betrachtung — fester Raum B und Abbildung $\alpha : A \rightarrow A'$ — ergibt analog relative Gruppen $P_n(\alpha, B)$ und ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Pi_*(A', B) & \xrightarrow{\alpha_*} & \Pi_*(A, B) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(\alpha, B) & \end{array}$$

sowie einen Exzisionsisomorphismus vom Grade -1 für Cofaserungen α (d.h. Abbildungen $\alpha : A \rightarrow A'$ mit „homotopy extension property“, $A'/\alpha(A) = A_0$ heisst dann die Cofaser von α)

$$P_*(\alpha, B) \cong \Pi_*(A_0, B).$$

Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem A

- (I) Exaktheit für Abbildungen $\beta : B \rightarrow B'$ und passende relative Gruppen $P_*(A, \beta)$,
- (II) Exzision für Faserungen;

bei festem B

- (I') Exaktheit für Abbildungen $\alpha : A \rightarrow A'$ und passende relative Gruppen $P_*(\alpha, B)$,
- (II') Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bzw. (III'), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus β_* bzw. α^* induzieren. Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum B* oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum A* , wobei eine Unterscheidung für die „absoluten“ Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von A bzw. B —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume B , vgl. Abschnitt 3.

2. DIE EXAKTE SEQUENZ DER RELATIVEN GRUPPEN.

Sind β_1 und β_2 Abbildungen, $\beta_1 : B_1 \rightarrow B'_1$, $\beta_2 : B_2 \rightarrow B'_2$, so versteht man unter einer Abbildung $\Phi : \beta_1 \rightarrow \beta_2$ ein Paar von Abbildungen $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ und $\varphi' : B'_1 \rightarrow B'_2$ derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung Φ induziert Homomorphismen $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \rightarrow P_n(A, \beta_2)$, $n = 1, 2, \dots$, die sich wiederum durch passende relative Gruppen „zweiter Stufe“

$P_n(A, \Phi)$ zu einer exakten Sequenz verknüpfen lassen; wie vorher schreiben wir auch diese als exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(A, \beta_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & P_*(A, \beta_2) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \Phi) & \end{array} \quad (2.1)$$

Dual hiezu erhält man für die Gruppen $P_*(\alpha, B)$ und für eine Abbildung $\Phi : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(\alpha_2, B) & \xrightarrow{\Phi^*} & P_*(\alpha_1, B) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P(\Phi, B) & \end{array} \quad (2.2)$$

Das Verfahren lässt sich natürlich iterieren, und man gelangt zu relativen Gruppen beliebig hoher Stufe.

Aus den beiden exakten Dreiecken erhält man durch Spezialisierung viele bekannte Folgen der Cohomologie – und der Homotopietheorie, so insbesondere die *Triadensequenzen* und die *Tripelsequenzen* (vgl. [4]). Wir weisen hier nur auf die Tripelsequenz hin, die aus (2.1) entsteht, wenn man $B_1 = B_2$ und $\varphi = \text{Identität}$ wählt, also $\beta_2 = \varphi' \beta_1$; man erhält dann das exakte Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(A, \beta_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & P_*(A, \beta_2) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \varphi') & \end{array}$$

in welchem Φ_* und J vom Grad 0, ∂ vom Grad -1 ist und welches die Verknüpfung der $P_*(A, \beta)$ für die Zusammensetzung zweier Abbildungen liefert. Ebenso erhält man aus (2.2) ein zum obigen duales Dreieck. (Die Spezialfälle, wo die betreffenden Abbildungen Inklusionen sind, sind wohlbekannt für Cohomologie- und Homotopiegruppen.)

Für Zusammensetzungen von mehr als zwei Abbildungen ergeben sich hieraus leicht verschiedene *Spektralreihen* für die $P_*(A, \beta)$, die Cohomologiegruppen usw., die alle bekannten und für Theorie und Anwendung wichtigen Spektralreihen als Spezialfälle enthalten.

3. COHOMOLOGIE, HINDERNIS, TRANSGRESSION.

Wir betrachten hier nicht einen einzelnen Testraum B , sondern eine Folge von Räumen (Polyedern) B_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ und Homotopieäquivalenzen $\omega_n : B_n \rightarrow \Omega B_{n+1}$. Die Gruppen $\Pi_n(A, B_{m+n}) = \Pi(A, \Omega^n B_{m+n}) \cong \Pi(A, B_m)$ sind dann von $n > 0$ unabhängig, vermöge bestimmter Isomorphismen; wir bezeichnen sie mit $h^m(A)$. Dasselbe gilt für die relativen Gruppen $P_{n+1}(\alpha, B_{m+n})$, für eine Abbildung $\alpha : A \rightarrow A'$, die mit $h^m(\alpha)$ bezeichnet werden.

Diese Gruppen $h^m(A)$, $h^m(\alpha)$, bzw. ihre direkten Summen $h^*(A)$ und $h^*(\alpha)$ erfüllen dann die Eigenschaften

(I') Exaktheit, d.h. man hat ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} h^*(A') & \xrightarrow{\alpha^*} & h^*(A) \\ \delta \swarrow & & \searrow J \\ & h^*(\alpha) & \end{array}$$

wobei J (gewöhnlich mit δ bezeichnet) den Grad $+1$ hat, und δ den Grad 0 , dies wegen der Definition der $h_m(\alpha) = P_1(\alpha, B_m)$.

(II') Exzision, d.h. man hat für Cofaserungen α mit der Cofaser A_0 einen Exzisionsisomorphismus vom Grade 0

$$h^*(\alpha) \cong h^*(A_0).$$

(III') Homotopie.

Von den Cohomologie-Axiomen von Eilenberg-Steenrod fehlt also nur das *Dimensionsaxiom* $h^m(S_k) = 0$ für $m \neq k$; es ist dann erfüllt, wenn alle B_n Eilenberg-MacLane-Polyeder $K(G, n)$ sind, wobei G eine beliebige Abelsche Gruppe ist (für alle n dieselbe, da $\pi_n(B_n) \cong \pi_n(\Omega B_{n+1}) = \pi_{n+1}(B_{n+1})$ ist), und in diesem Fall ist der Homotopietypus von B_m , somit die Struktur von $h^m(A)$ und $h^m(\alpha)$ durch die Gruppe G und die Zahl m bestimmt. Wir schreiben für diese Gruppen, die eine volle Cohomologietheorie¹⁾ bilden, $H^m(A; G)$ bzw. $H^m(\alpha; G)$. Auf die

¹⁾ Es handelt sich natürlich um die „reduzierte“ Cohomologie für Räume mit Basispunkt; daraus lässt sich in bekannter Weise die „nicht reduzierte“ für Räume ohne Basispunkt herleiten.

verallgemeinerten Cohomologietheorien ohne Dimensionsaxiom gehen wir hier nicht ein.

Diese homotopisch definierten Gruppen H^m stimmen (nach dem Eindeutigkeitssatz von Eilenberg-Steenrod) für ein endliches Polyeder mit den üblichen überein. Für kompakte Räume — und unter gewissen Einschränkungen auch für parakompakte — sind es die Čechschen Cohomologiegruppen, vgl. P. J. Huber [6]. Für beliebige (endliche oder unendliche) Polyeder A lässt sich mit Hilfe der Tripelsequenz (vgl. Abschnitt 2) leicht in direkter und elementarer Weise zeigen, dass sie mit den gewöhnlichen simplizialen Cohomologiegruppen zusammenfallen; dabei ergibt sich folgende Beschreibung der simplizialen Cozyklen von A : Es bezeichne A^k das k -dimensionale Skelett von A , j_m die Inklusion $A^{m-1} \rightarrow A$; die Cozyklengruppe Z^m ist isomorph $P_1(j_m, K(G, m))$, d.h. ein Cozyklus ist eine Abbildungsklasse $\Phi = (\varphi, \varphi')$

$$\begin{array}{ccc} A^{m-1} & \xrightarrow{\varphi} & EK(G, m) \\ j_m \downarrow & \xRightarrow{\Phi} & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{\varphi'} & K(G, m) \end{array}$$

wo $EK(G, m)$ den Wegeraum und p seine natürliche Projektion bedeutet. Die Cohomologieklassse von Φ ist das durch φ' gegebene Element von $\Pi(A, K(G, m)) = H^m(A; G)$.

Eine einfache Anwendung hievon: Es sei $f : E \rightarrow B$ eine Faserabbildung mit der Faser F , und $s : B^{m-1} \rightarrow E$ eine Schnittfläche über dem $(m-1)$ -Skelett von B (also $fs = j_m$). Ferner sei $\Phi : f \rightarrow p$ eine Abbildung von f in die Faserung $p : EK(G, m) \rightarrow K(G, m)$, d.h. ein Element der relativen Gruppe $P_1(f, K(G, m)) = H^m(f; G)$. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B^{m-1} & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{\varphi} & EK(G, m) \\ j_m \downarrow & \xRightarrow{\Psi} & \downarrow & \xRightarrow{\Phi} & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{1} & B & \xrightarrow{\varphi'} & K(G, m) \end{array}$$

ist $\Phi\Psi$ ein simplizialer m -Cozyklus von B . Man verifiziert leicht, dass er folgende Bedeutung hat: es ist der zur Schnittfläche s gehörige *Hinderniscozyklus* η (mit Koeffizienten in $\pi_{m-1}(F)$), in welchem man die Werte noch einem Koeffizienten-Homomor-

phismus $h : \pi_{m-1}(F) \rightarrow G$ unterworfen hat, nämlich dem durch Φ induzierten Homomorphismus von π_{m-1} der Faser von f in π_{m-1} der Faser von p (diese ist $\Omega K(G, m)$, also ist $\pi_{m-1}(\Omega K(G, m)) = G$).

Die *Cohomologieklass*e dieses Cozyklus $\Phi\Psi = h_*(\eta)$ ist gemäss der obigen Vorschrift gegeben durch die „untere Komponente“ von Φ , also durch $\varphi' \in H^m(B; G)$ und somit von s unabhängig. φ' ist übrigens nichts anderes als ein durch *Transgression* aus einem Cohomologieelement $\in H^{m-1}(F; G)$ der Faser gewonnenes Element. Man beachte, dass dieser Zusammenhang zwischen Hindernis und Transgression nicht nur für das „erste Hindernis“, sondern für eine beliebige Schnittfläche gilt. Im Fall des *ersten Hindernisses*, d.h. wenn die Faser F $(m-2)$ -zusammenhängend ist ($\pi_i(F) = 0, i \leq m-2$), weiss man, dass eine Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$ existiert, derart dass der induzierte Homomorphismus h von $\pi_{m-1}(F)$ in $G = \pi_{m-1}(F)$ die Identität ist; somit ist dann der Cozyklus $\Phi\Psi = \eta$ gleich dem *ersten Hinderniscozyklus selbst*, und seine Cohomologieklass $\in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ ist einfach gleich der Komponente φ' von Φ , unabhängig von der speziell gewählten $(m-1)$ -Schnittfläche.

Damit wird auch eine Definition des ersten Hindernisses nahegelegt, die nicht auf der Polyeder-Eigenschaft von B beruht und das übliche schrittweise Erweiterungsverfahren nicht benutzt: es ist gegeben durch die Komponente φ' einer Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$. Von dieser Hindernisklass $\varphi' \in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ lässt sich im Falle $F = K(G, m-1)$ direkt nachweisen, dass sie die Faserungen $E \rightarrow B$ mit Faser $K(G, m-1)$ charakterisiert.

Auf den Fall höherer Hindernisse soll an anderer Stelle eingegangen werden.

4. AUSBLICKE.

Die homotopische Auffassung der Cohomologie, wie sie oben skizziert ist, lässt sich sehr weit fortführen (obwohl die explizite Berechnung in Spezialfällen sich stets auf simpliziale oder Zellenstrukturen stützt). In diesen Gedankenkreis gehört die Postnikovzerlegung eines Raumes (Charakterisierung des Homo-

topietypes durch die Homotopiegruppen und gewisse Cohomologieklassen) sowie diejenige einer Abbildung, vgl. [3]; ferner die Cohomologieoperationen, sowohl die primären wie die höhern. Ueberdies legt die Dualität Cohomologie-Homotopie, sei sie heuristischer oder strikter Art, analoge Bildungen für die Homotopiegruppen nahe: Homotopiegruppen mit Koeffizienten (vgl. [1]), Homotopiezerlegung eines einfach-zusammenhängenden Polyeders, oder einer Abbildung, vgl. [3]; Charakterisierung spezieller Cofaserungen durch eine Hindernisklasse, genau dual zu dem am Schluss von Abschnitt 3 beschriebenen Vorgehen, vgl. [2]. Weitere duale Beziehungen bestehen zwischen dem cup-Produkt in der Cohomologie und dem Whitehead-Produkt in der Homotopie. Auch zu numerischen Invarianten wie der „Lusternik-Schnirelman-Categorie“ eines Raumes konnten duale Grössen definiert werden (P. J. Hilton, Berstein-Ganea), wobei jedoch offensichtlich die naive Dualität versagt; sie kann nur durch Zwischenschaltung geeigneter Funktoren, die von Räumen zu algebraischen Begriffen führen (z.B. Gruppen, semisimplizialen Gruppen usw.) oder umgekehrt, gerettet werden. Die Gründe hiezu liegen in allgemeinen kategoriethoretischen Gesetzmässigkeiten, die von P. J. Hilton und dem Verfasser ausführlich untersucht worden sind [7].

LITERATUR

- [1] B. ECKMANN et P. J. HILTON: Groupes d'homotopie et dualité. *C.R. Acad. Sc., Paris*, t. 246 (1958), pp. 2444, 2555, 2991.
- [2] — — Transgression homotopique et cohomologique. *C.R. Acad. Sc., Paris*, t. 247 (1958), p. 620.
- [3] — — On the homology and homotopy decomposition of continuous maps. *Proc. Nat. Acad. Sc., USA*, Vol. 45 (1959), p. 372.
- [4] — — Homotopy Groups of Maps and Exact Sequences. *Comm. Math. Helv.*, 34 (1960), p. 272.
- [5] P. J. HUBER: Homotopy Theory in General Categories. *Math. Annalen* (1961) p. 361.
- [6] P. J. HUBER: Homotopical cohomology and Čech cohomology. *Math. Annalen* (1961) p. 73.
- [7] B. ECKMANN and P. J. HILTON: Group-like structures in general categories, I. *Math. Annalen* (1962) p. 227. II, III (to appear).