Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIBLIOGRAPHIE DE L'ARITHMÉTIQUE

Autor: Chatelet, Albert

Kapitel: 8. Les nombres premiers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37965

Ces théories ont été reprises et généralisées d'un point de vue géométrique très simple par MINKOWSKI. Cette méthode conduit à des *théorèmes d'existence* en théorie des nombres.

On peut rattacher à ces questions la démonstration de la *transcendance* des nombres e et π par HERMITE et LINDEMANN. SIEGEL a aussi démontré la transcendance d'autres nombres.

Bibliographie: 5, 6, 11, 15, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 38, 39, 40, 42.

8. Les nombres premiers

Les nombres premiers forment la base minimum permettant d'engendrer le groupe multiplicatif des entiers: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ Ce fait a pour conséquence une propriété des séries:

$$\Pi \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = \sum \frac{1}{n^s}$$

Cette série ne converge que pour $s > 1$; mais la série:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$$

converge pour $s \geqq 1$.

La divergence de la série $\Sigma \frac{1}{n^s}$ pour $s = 1$ a notamment pour conséquence l'existence d'une *infinité de nombres premiers*. L'étude de cette série, appelée $\zeta(s)$, a fourni plus généralement des renseignements sur la répartition des nombres premiers. On peut y rattacher les études sur les séries de DIRICHLET, les études de HADAMARD sur les fonctions entières, notamment la définition du genre et les études de la VALLÉE POUSSION.

La méthode précédente pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers peut être généralisée. Par exemple, en désignant par p les nombres premiers égaux à la somme de 1 et d'un multiple de 4 et par q les nombres premiers égaux à la différence d'un multiple de 4 et de 1, on obtient:

$$\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}\right)=\sum\frac{1}{m^s}$$

où m décrit tous les entiers impairs décomposables en une somme de 2 carrés (a^2+b^2). La divergence de la série pour $s = 1$ entraine l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme p et de la forme q. Plus généralement LEJEUNE-DIRICHLET a démontré l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute *progression arithmétique* dont la raison et le premier terme sont premiers entre eux.

HECKE a étudié de façon analogue les nombres premiers qui sont normes d'idéaux d'un corps de nombres algébriques donné.

Bibliographie: 11, 15, 18, 19, 23, 27, 28, 30, 38.

9. THÉORIE DES GROUPES ET SUBSTITUTIONS

La notion de groupe est apparue dans l'étude des permutations d'un nombre fini d'éléments, et plus particulièrement dans l'étude des permutations entre différentes racines d'une même équation algébrique.

On peut faire remonter l'origine de cette notion et de ces méthodes à PASCAL, NEWTON, et surtout VANDERMONDE, dans leurs recherches sur les équations binomes et la construction des polygones. Mais c'est LAGRANGE et ABEL qui les ont clairement dégagées pour les équations abéliennes et GALOIS pour le cas général. JORDAN a repris les méthodes de GALOIS et les a exposées magistralement.

SOPHUS LIE, Elie CARTAN ont généralisé ces méthodes à des opérations sur des fonctions.

Plus récemment a été introduite une définition abstraite des groupes et ont été étudiées les propriétés de ces ensembles.

Bibliographie: 8, 9, 13, 20, 25, 36, 44.