Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: Deuxième Section Définitions modernes de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

édition [13] « ... nous avons abandonné l'ancienne définition de la différentielle totale et adopté celle de Stolz. La supériorité de cette définition a été mise en lumière par les travaux de M. M. S. Pierpont, Fréchet et surtout W. H. Young. Elle est indiscutable: les théorèmes découlant plus directement des principes, la théorie de la différentiation des fonctions explicites et implicites devient plus serrée et, par le fait, plus satisfaisante ». Cette définition est d'ailleurs rappelée à la page 140 du même tome. Les mêmes avantages s'appliquent aux autres définitions que nous rappellerons plus loin, puisqu'elles sont équivalentes à celle de Stolz.

Deuxième Section

Définitions modernes de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au domaine des fonctions numériques de deux variables numériques, le cas de plus de deux variables numériques pouvant être traité de la même façon.

Autrefois, la définition théorique de la différentiabilité de $f(x, y)$ en un point, consistait dans l'hypothèse de l'existence des deux dérivées partielles en ce point. Pratiquement, pour établir un parallélisme des propriétés de la différentielle entre le cas d'une et celui de plusieurs variables, on faisait généralement l'hypothèse H définie ci-dessous. Les définitions modernes (qui vont suivre) de la différentiabilité (pour plusieurs variables) se placent entre ces deux extrêmes. Comme on le verra plus loin, elles sont moins générales que la définition théorique antérieure et plus générales que la définition pratique antérieure. Le gain acquis par les définitions modernes consiste en ce que, comme la définition pratique antérieure (voir pages 180-181, et 207) plus étroite, elles réalisent le parallélisme cherché, ce que ne faisait pas la définition théorique antérieure.

Considérons d'abord l'exemple A de la page 213; $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, (avec $f(o, o) = o$), a bien ses deux dérivées partielles à l'origine, mais n'est pas continue à l'origine, donc (page 209) n'est pas différentiable au sens moderne.

Plaçons nous maintenant dans l'hypothèse suivante: *Hypothèse H:* $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles f'_x, f'_y au *voisinage* du point (a, b) et celles-ci sont continues au point (a, b). Alors on peut écrire

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b)$$

Et en appliquant le théorème des accroissements finis puisque $f(x, b+k)$ et $f(a, y)$ sont dérivables en x et y respectivement, pour h et k assez petits, on aura:

$$\Delta f = hf'_x(a+\theta h, b+k) + kf'_y(a, b+\theta' k), \text{ avec } 0 < \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta' \end{Bmatrix} < 1,$$

et puisque f'_x et f'_y sont continues au point (a, b)

$$\Delta f = h[f'_x(a, b) + \varepsilon] + k[f'_y(a, b) + \varepsilon']$$

avec $\lim \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{Bmatrix} = 0$ quand h et k tendent vers zéro.

C'est pour éliminer l'hypothèse H que l'on a commencé à introduire une nouvelle définition de la différentiabilité, consistant à partir de la formule précédente *supposée vraie*, sans tenir compte de H. Le gain consiste en ce que si l'hypothèse H entraîne la formule ci-dessus, la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple de la page 207.

La définition de Stolz et celle de Fréchet

I — C'est en s'inspirant des considérations qui précèdent et restent dans le domaine de l'analyse classique que Stolz [7], Pierpont [8] et Young [9] sont parvenus indépendamment et successivement à la définition suivante:

Une fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) si
1° elle est dérivable en ce point par rapport à x et à y,
2° on peut écrire:

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) = (f'_a + \varepsilon)\Delta x + (f'_b + \varepsilon')\Delta y, \quad (8)$$

où ε et ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

Et s'il en est ainsi, on appelle différentielle de f (au point (a, b) et correspondant aux accroissements Δx, Δy de x et y), l'expression

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y \tag{9}$$

(en prenant pour f, x, on a évidemment $dx = \Delta x$), on aurait de même $dy = \Delta y$, de sorte qu'on peut écrire:

$$df = f'_a dx + f'_b dy \tag{10}$$

égalité qui n'est actuellement établie que lorsque x et y sont des variables indépendantes, mais qui sera généralisée plus loin, voir pages 194. 209.

En 1893, Stolz, après avoir donné sa définition, montre [7] qu'elle permet immédiatement l'extension des propriétés de la différentielle d'une fonction d'une variable. W. H. Young en retrouvant indépendamment ces résultats en 1910, les a complétés dans un excellent opuscule [9] consacré à ces questions [1]).

Il faut ajouter que Stolz a eu aussi l'idée [7] d'une définition équivalente à sa première mais de forme légèrement différente.

Il dit que $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), si l'on peut écrire:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon'\Delta y \tag{11}$$

où A, B sont indépendants de Δx, Δy et où ε, ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent vers zéro.

Et alors la différentielle de f en (a, b) sera:

$$df = A\Delta x + B\Delta y$$

Mais il fait observer que pour $\Delta y \equiv 0$

$$\frac{f(a+\Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

---

1) Nous avons nous-même publié un exposé analogue [10] en 1912 avec quelques compléments originaux reproduits ici dans la suite.

de sorte que

1°) $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_a au point (a, b),

2°) A est égal à cette dérivée partielle. On voit de même que f'_b existe et est égal à B.

Les deux définitions de Stolz sont bien équivalentes.

Stolz a aussi donné ([7], page 134) une condition suffisante très générale pour la différentiabilité. Pour que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b), il suffit que f ait en ce point ses deux dérivées partielles et qu'en outre, l'une de ces dérivées, par exemple f'_x, existe au voisinage de (a, b) et soit continue en ce point. Car on a:

$$f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b) = [f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b+k)] + [f(a\,,\ b+k) - f(a\,,\ b)] = hf'_x(a+\theta h\,,\ b+k) + k[f'_y(a, b)+\eta]$$

avec $0 < \theta < 1$, $\lim\limits_{k \to 0} \eta = 0$. Mais puisque f'_x est continue au point, $(a\ b)$:

$$f'_x(a+\theta h\,,\ b+k) - f'_x(a\,,\ b) = \varepsilon$$

où $\varepsilon \to 0$ quand h et k tendent vers zéro. D'où, comme annoncé:

$$f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b) = h[f'_x(a\,,\ b)+\varepsilon] + k[f'_y(a\,,\ b)+\eta]$$

où η et ε tendent vers zéro quand h et k tendent vers zéro.

Il est remarquable que, plus tard, Jordan ait eu une idée analogue [5], mais sans en tirer l'extension de la différentiabilité.

Il considère le cas où l'on aurait la formule (11) et il en tire:

$$A = f'_x\,, \quad B = f'_b \tag{12}$$

Mais comment? C'est après avoir établi, comme ses prédécesseurs (sauf Stolz) la formule (8) *dans l'hypothèse H :* $f(x, y)$ a des dérivées partielles f'_x, f'_y *au voisinage* de (a, b) et celles-ci sont continues au point (a, b). Et alors, *il retranche* les expressions (8) et (11) de Δf et il fait tendre Δx et Δy vers zéro de sorte que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$. Il retrouve bien ainsi les égalités (12), mais *sous l'hypothèse H.* Alors que Stolz obtient ces égalités par le raisonnement plus simple, indiqué ci-dessus, sans faire l'hypothèse H, ni d'ailleurs sans aucune hypothèse supplémentaire.

II — C'est par une voie tout à fait différente que nous sommes parvenu à une définition équivalente et très analogue, mais d'une forme distincte, *plus propre à la généralisation aux fonctions abstraites*. En effet, contrairement au processus habituel qui consiste à passer du particulier au général, c'est *en revenant du cas général* des espaces abstraits *au cas particulier* du plan que nous avons obtenu la définition qui va suivre. Cela tient à ce que, au départ, nous étions habitués aux définitions usuelles à cette époque, mais que notre but était l'étude des fonctions abstraites. Définissant d'abord la différentielle d'une fonctionnelle [18], puis d'une transformation d'espace abstrait dans un espace abstrait, nous avons pu prouver, dans le cas d'une relation entre deux espaces de Banach [19] que cette différentielle conservait les propriétés principales de la différentielle d'une fonction numérique d'une variable numérique. C'est seulement *ensuite* (puisque notre but principal était, à cette époque, l'étude des espaces abstraits) que nous nous sommes demandé si cette définition était bien une généralisation complète de la différentielle classique. Et nous nous sommes aperçu qu'il n'en était rien et que nous obtenions la définition plus stricte suivante:

Une fonction $f(x, y)$ est *différentiable à notre sens*, au point (a, b), si son accroissement ne diffère d'une certaine fonction linéaire $\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y)$ des accroissements Δx, Δy des variables x, y que par un infiniment petit par rapport à la distance r du point (a, b) au point voisin $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

Et, dans ce cas, la *différentielle* de f au point (a, b) sera cette fonction $\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y)$. Autrement dit, en posant:

$$\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y,$$

on aura

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \omega r \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 0} \omega = 0$$

et

$$df \equiv A\Delta x + B\Delta y. \tag{14}$$

On peut prendre pour r: $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
Mais puisque

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Delta x| + |\Delta y|) \leqslant \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$$

on peut prendre aussi

$$r = |\Delta x| + |\Delta y| .$$

On peut aussi prendre pour r:

$$r = \operatorname{Max} \begin{Bmatrix} |\Delta x| \\ |\Delta y| \end{Bmatrix}, \text{ etc.} \ldots$$

Dès lors, en prenant dans (13), comme Stolz, $\Delta y = 0$, on voit que $f(x, y)$ est dérivable en x au point (a, b) et que $A = f'_a$. De même $f(x, y)$ est dérivable en y au point (a, b) et l'on a $B = f'_b$ et par suite:

$$df'_a = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y .$$

Finalement on voit qu'une fonction $f(x, y)$ différentiable à notre sens l'est aussi au sens de Stolz et avec la même différentielle.

Comme dans la formule (13), si l'on écrit

$$\varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y = \omega r$$

on a
$$|\omega| = \left| \varepsilon \frac{\Delta x}{r} + \varepsilon' \frac{\Delta y}{r} \right| \leqq |\varepsilon| + |\varepsilon'|$$

d'où
$$\lim_{r \to 0} \omega = 0,$$

on voit que réciproquement, toute fonction différentiable au sens de Stolz l'est aussi à notre sens, avec la même différentielle. C'est parce que ces deux définitions sont très semblables que nous n'avons pas reporté plus loin leur comparaison.

Mais notre expression (13) se prête mieux aux généralisations. Car, ayant observé qu'on peut adopter plusieurs expressions pour r, sans changer la définition, ces expressions conduisent au contraire, chacune à une définition différente, dans le cas des espaces fonctionnels.

Définition géometrique de la différentielle

Pour les fonctions d'une variable, il y a équivalence entre l'existence de la dérivée de $f(x)$ pour $x = a$ et l'existence d'une tangente (non parallèle à Oy) à la courbe $y = f(x)$ au point $x = a$.

Mais pour les fonctions de deux variables l'équivalence n'est plus totale. Elle a bien lieu partiellement; car, il est bien exact que si la surface S: $z = f(x, y)$ a un plan tangent au point (a, b, c), $c = f(a, b)$ et si $f(x, y)$ a des dérivées partielles au point (a, b), alors l'équation du plan tangent est:

$$Z - c = (X-a)f'_a + (Y-b)f'_b \,. \tag{15}$$

En effet, la courbe intersection de S et du plan $y = b$, ayant pour équation: $z = f(x, b)$ a alors une tangente au point d'abscisse a, qui est:

$$Z - c = f'_b(a\,,\, b)(X-a)\,.$$

Et de même on a la tangente: $Z - c = f'_b(Y-b)$ au point $y = b$ à la courbe intersection de S avec le plan $X = a$.

Dès lors, le plan tangent à S au point (a, b, c), devant contenir ces deux tangentes, aura pour équation, l'équation (15).

Mais autrefois, on considérait comme allant de soi que: si une fonction $f(x, y)$ avait ses deux dérivées partielles $f'_a(a, b)$, $f'_b(a, b)$ au point (a, b), alors: 1° la surface S: $z = f(x, y)$ avait un plan tangent au point (a, b) et 2° l'équation de ce plan tangent était $Z - c = f'_a(X-a) + f'_e(Y-b)$.

Nous allons montrer qu'une telle affirmation est fausse en donnant un exemple du contraire.

Définition d'un plan tangent

A cet effet, précisons d'abord que nous entendons par plan tangent à S au point (a, b, c) un plan qui soit le lieu des tangentes aux courbes situées sur S et passant par ce point (s'entendant de celles de ces courbes qui ont effectivement une tangente en ce point).

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, c'est qu'il existe un plan P passant par le point considéré Q et tel d'abord qu'il contienne toutes les tangentes en Q aux courbes tracées sur S, passant par Q et qui ont effectivement une tangente en Q. Mais cette condition, U, *n'est pas suffisante.*

S'il existait dans ce plan P une droite D passant par Q qui ne soit tangente à aucune courbe située sur S et passant par Q, alors D n'appartiendrait pas au lieu des tangentes précisées plus haut, ce lieu ne serait qu'une partie de P.

Dès lors, pour qu'un plan P soit tangent à S au point Q, *il faut et il suffit que deux conditions soient réalisées*, la condition U ci-dessus et la condition V suivante: toute droite D située dans P et passant par Q doit être tangente en Q, à au moins une courbe située sur S et passant par Q. Voici maintenant l'exemple annoncé à la page 189.

Exemple

Prenons pour exemple, le cas où $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $x^2+y^2 \neq 0$.

On a

$$|f| = \sqrt{|xy|}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{\frac{|xy|}{2}}$$

donc $|f| \to 0$ avec x^2+y^2. Alors, en prenant $f(0, 0) = 0$ la fonction $f(x, y)$ sera partout continue.

On a $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x-0} = 0$, donc $f(x, y)$ a une dérivée partielle en x à l'origine 0 et celle-ci est nulle; de même $f'_y(0, 0)$ existe et est nulle.

Si donc la surface S a un plan tangent à l'origine, alors d'après ce qui précède, ce plan aura pour équation

$$Z = f'_x(0,0)X + f'_y(0,0)Y,$$

c'est-à-dire

$$Z = 0.$$

Dans la même hypothèse, la droite D du plan tangent située dans le plan $X = Y$ et qui, par suite passe par 0, devrait être tangente à une courbe C de S passant par 0. Soit M un point de C de coordonnées x, y, et $z = f(x, y)$, distinct de 0. Les cosinus directeurs de OM sont:

$$\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}, \text{ où } k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et ils devraient tendre vers les cosinus directeurs de D, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.$$

Dès lors, puisque $x/k \not\to 0$, et même $\to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, alors $\frac{y}{x} \to 1$ et $\frac{z}{x} \to 0$. Or

$$\frac{z}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\pm y/x}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \to \frac{\pm 1}{\sqrt{1+1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et non vers zéro. Ainsi, S n'a pas un véritable plan tangent au point O: il existe au moins une surface S représentée par l'équation $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est continue partout et a en un point particulier $x = O$, $y = O$, deux dérivées partielles $f'_x(O, O)$, $f'_y(O, O)$ sans que cette surface ait un plan tangent au point considéré. *Ainsi l'ancienne condition pour l'existence du plan tangent n'est pas assez stricte.*

Définition géométrique de la différentielle

Pour rétablir l'analogie avec le cas des fonctions d'une variable (page 180)e t avecn otre première définition (page 187) de la différentiabilité d'une fonction de deux variables, nous dirons [10, page 438, 439] qu'une fonction $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) si la surface S: $z = f(x, y)$ a un plan tangent T, non parallèle à Oz, au point de coordonnées a, b, et $c = f(a, b)$. Et alors, l'équation de ce plan étant nécessairement de la forme

$$Z - c = A(X - a) + B(Y - b),$$

on appellera différentielle de f au point (a, b) l'expression

$$df \equiv A\, \Delta a + B\, \Delta b \qquad (\text{où } \Delta a = x - a\,,\ \Delta b = y - b)\,.$$

Existence du plan tangent

Pour savoir si la fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), tout revient à chercher à quelle condition la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à Oz, au point (a, b, c).

Il faudra qu'il passe au point (a, b, c), un plan non parallèle à Oz vérifiant les conditions U et V de la page 190. Mais on devra tenir compte explicitement de deux conditions liées implicitement à la notion de surface représentable par la fonction $z = f(x, y)$. On supposera:

1°) que $f(x, y)$ qui n'est pas nécessairement définie partout, soit définie au voisinage du point Q considéré, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle de rayon r positif $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$;

2°) que $f(x, y)$ soit continue au point (a, b). Par exemple, on ne pourra pas prendre $a = b = 0$ et $f = \sqrt{x^3 y^3}$, qui n'est définie dans aucun voisinage complet de (0, 0) et qui a pourtant deux dérivées partielles (qui sont nulles) à l'origine.

Par exemple encore, on ne pourra prendre pour $f(x, y)$ une fonction définie partout sauf sur $x = o$, $y > O$ et nulle ailleurs, bien qu'elle vérifie les conditions V et U de la page 190.

Définition du plan tangent

Soit M un point quelconque d'une surface S et Q un point fixe de S. Soit enfin φ l'angle aigu de la corde QM avec un plan P. Si S a un plan tangent en Q et si celui-ci est P; si d'autre part, il passe par Q et s'il y a une courbe située sur S, ayant une tangente T en Q, telle que T soit située sur P, alors l'angle aigu, Ψ de QM et de T tend vers zéro quand $M \to Q$. Or, quand φ est l'angle de QM avec le plan P, on a $O \leqslant \varphi \leqslant \Psi$. Donc quand $M \to Q$, Ψ tendant vers zéro, il en sera de même de φ.

Réciproquement, sans savoir si P est tangent à S en Q, supposons que $\varphi = (\widehat{QM, P}) \to O$ avec QM, quelle que soit la façon dont $M \to Q$ sur S. Alors, soit, Δ, une droite du plan P passant par Q. Le plan R perpendiculaire à P et passant par Δ coupe S suivant une courbe C passant par Q. Soit M un point de C, distinct de Q. L'angle φ de MQ avec P est aussi l'angle de MQ avec Δ. Quand $M \to Q$, $\varphi \to O$ par hypothèse. C'est dire que la corde MQ de C tend vers Δ quand $M \to Q$, autrement dit que la condition V est vérifiée par P. Soit, d'autre part, Γ, une courbe sur S passant par Q et ayant une tangente δ en Q. Si M est un point de Γ alors l'angle φ de QM avec P tend vers zéro avec QM et il en est de même de l'angle Ψ de QM avec δ.

Prenons sur QM, dans la direction de Q vers M, un point M' tel que $QM' = 1$. Puisque la droite portant QM tend vers δ, M' va tendre vers un point N de δ tel que $QN = 1$. Or puisque $\varphi \to O$, la distance de M' au plan P tend vers zéro. Et comme cette distance tend vers la distance constante de N au plan P, cette dernière tend vers zéro, c'est-à-dire que δ est dans le plan P et par suite que P vérifie aussi la condition U.

Dans le raisonnement précédent, nous avons supposé que le plan R coupe effectivement S suivant une courbe C. C'est que nous avons admis implicitement que P vérifie une condition analogue à 1°, de la page 192, soit W: si l'on projette S sur P, il y a au moins un voisinage de Q qui appartient entièrement à cette projection.

D'autre part, quand nous supposons que le point M de S tend vers Q, nous admettons implicitement une condition T analogue à la condition 2° de la page 192.

En résumé, on peut définir un plan tangent de la manière suivante:

Un plan P passant par un point Q d'une surface S est, par définition, tangent à S en Q si,

1°) M étant un point quelconque de S, distinct de Q, l'angle aigu de M avec P tend vers zéro quand M tend vers Q,

2°) La condition W ci-dessus est satisfaite.

Définitions opérationnelle par Hadamard

Aux pages 2 et 3 du tome I de son cours d'analyse [16], M. Hadamard rappelle en 1927, brièvement mais nettement, deux définitions de la différentielle. La seconde est celle où Stolz et moi-même considérons la différentielle de $f(x, y)$ comme une expression approchée, mais plus simple, de l'accroissement de f.

La première procède d'une idée tout à fait différente qu'il avait déjà introduite en 1923 [11].

Pour Hadamard, l'introduction de la différentielle a pour effet d'exprimer plus simplement les théorèmes des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

Au moyen de la notion de dérivée, on écrit, *sous certaines conditions :*

$$Df(x(t), y(t)) = f_a' x_t' + f_b' y_t' . \tag{16}$$

En introduisant la notion de différentielle, on écrit, sous les mêmes conditions:

$$df(x, y) = f_a' dx + f_b' dy \tag{17}$$

que x et y soient des variables indépendantes ou qu'elles soient des fonctions d'une variable indépendante. C'est là un avantage précieux qui non seulement abrège à la fois l'écriture de la formule, mais aussi rend les démonstrations plus simples, plus intuitives et plus générales.

Cette utilité de la notion de différentielle étant admise, notons que, dans notre jeunesse, la formule (16) était démontrée dans l'hypothèse H où la fonction $f(x, y)$ admettait des dérivées partielles, non seulement au point (a, b), mais en son voisinage et où, en outre, ces dérivées partielles étaient continues en ce point. (On suppose, bien entendu, que pour la valeur de t considérée, $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables et respectivement égaux à a et b). Or la formule (16) peut rester exacte sans que toutes les hypothèses de H soient vérifiées.

Par exemple, il suffit de prendre:

$$f(0,0) = 0 \text{ et } f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ pour } x^2 + y^2 \neq 0$$

Cette fonction est continue partout et a, à l'origine, deux dérivées partielles. Mais celles-ci ne sont pas continues à l'origine. Comme elles sont nulles à l'origine, la formule (16) exprime que $f(x(t)), y(t))$ (où $x(o) = y(o) = O$) a une dérivée à l'origine et que celle-ci est nulle, ce qui a lieu. Ainsi pour cette fonction, la formule (16) est exacte sans que les dérivées partielles de f soient continues à l'origine.

Inversement, il ne suffit pas que la formule (16) ait un sens — c'est-à-dire que $x(t)$ et $y(t)$ étant dérivables et égaux respectivement à a, b pour la valeur de t considérée, la fonction $f(x, y)$ ait ses deux dérivées partielles pour $x = a$, $y = b$. Par exemple prenons $x(t) = y(t) = t$, $a = b = x(o) = y(o) = 0$ et, comme à la page 190,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ pour } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ et } f(0,0) = 0\,.$$

On voit comme plus haut que $f'_a(O, O) = f'_b(O, O) = O$. On devrait donc avoir

$$f(t, t) = \frac{t^2}{\sqrt{2t^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{2}},$$

donc $f(t, t)$ n'est même pas dérivable pour $t = 0$, contrairement à (17). Ainsi pour conserver (16), il ne suffit pas que cette formule ait un sens et il n'est pas nécessaire non plus que les hypothèses restrictives, faites plus haut, sur f au voisinage de (a, b) soient vérifiées. Il en est de même pour la formule (17).

Pour être sûr que cette dernière formule soit valable, Hadamard — admettant la définition usuelle de la différentielle d'une fonction d'une variable — dit, tout simplement que la fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) si la formule (16) est axacte. C'est à dire:

1°) Si $f(x, y)$ admet ses deux dérivées partielles au point (a, b);

2°) Si, quelles que soient les fonctions $x(t)$, $y(t)$ dérivables et respectivement égales à a et b pour la valeur de t considérée, la fonction $f(x(t), y(t))$ est dérivable pour cette même valeur de t et si la dérivée est égale au second membre de (16) pour la valeur de t considérée.

S'il en est ainsi, la différentielle de f sera donnée par définition, par la formule:

$$df(x, y) = f'_a dx + f'_b dy \qquad (19)$$

pour la valeur de t considérée.

Remarque : Comme Stolz l'avait fait, (voir p. 186), on pourrait se dispenser d'introduire dans la définition précédente, l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b).

On supprimerait 1° et 2°, on dirait que pour la valeur de t considérée, la dérivée de $f(x(t), y(t))$ est de la forme:

$$Ax'_t + By'_t .$$

En effet, en appliquant cette définition au cas où

$$x(t) = t \quad \text{et} \quad y(t) = b, \quad \text{on devrait avoir} \quad Df(t, b) = A;$$

c'est dire que $f(x, y)$ a une dérivée partielle en x au point (a, b) et que celle-ci est égale à A. On verrait de même que $B = f'_y(a, b)$ et l'on verrait ainsi que la seconde forme de la définition de Hadamard est équivalente à la première.

Définition analogique par Severi

Severi [12] a réussi à donner la définition moderne de la différentiabilité la plus analogue à la définition antérieure. Au lieu de supposer seulement l'existence de dérivées partielles au point considéré, il exige l'existence en ce point de dérivées partielles restreintes (plus tard, Ostrowski a été conduit à la même définition à une nuance près dans la définition équivalente, des dérivées partielles restreintes).

Nous dirons, avec Severi, que $f(x, y)$ a au point (a, b), *une dérivée partielle restreinte* par rapport à x si le rapport:

$$\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}$$

tend vers une limite finie et déterminée λ, quand $(x-a)^2 + (y-b)^2$ tend vers zéro de façon que $\left|\dfrac{y-b}{x-a}\right|$ reste bornée [1]). S'il en est ainsi, cela aura lieu, en particulier, quand $y = b$, c'est-à-dire que

[1]) En réalité, Severi suppose que ce rapport a une limite, mais qu'il reste borné suffit.

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \to \lambda \quad \text{quand} \quad x \to a .$$

Autrement dit, quand $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte, par rapport à a, elle a aussi une dérivée partielle au sens ordinaire par rapport à a et la première est égale à la seconde f'_a.

On dira de même que $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte par rapport à y, si le rapport

$$\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} \tag{20}$$

a une limite quand $(x-a)^2 + (y-b)^2 \to 0$ de sorte que $\left|\frac{x-a}{y-b}\right|$ reste bornée. Et alors $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_b au sens ordinaire au point (a, b) et le rapport (20) tend vers f'_b.

Ceci étant, nous dirons que $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) *au sens de Severi*, si en ce point, $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles restreintes par rapport à x et y. Et alors la différentielle de $f(x, y)$ au point (a, b) au sens de Severi sera encore

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y . \tag{19}$$

Troisième Section

Equivalence des quatre définitions de la différentielle

Les quatre définitions précédentes de la différentielle d'une fonction $f(x, y)$ en un point (a, b) quoique différentes dans la forme présentent cependant dans cette même forme deux traits communs.

D'une part, ou bien elles présupposent l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b), ou bien cette existence résulte-t-elle directement de la définition.