Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: Sixième Section Différentielles successives. Dérivées partielles du second ordre.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

tions (35) dites de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ sera monogène pour $z = 0$, car on aura:

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (A+\varepsilon')\Delta x - (B+\varepsilon'')\Delta y + i[(B+\varepsilon_1)\Delta x + (A+\varepsilon_2)\Delta y] + (\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + iB + \eta$$

avec

$$|\eta| = \frac{|(\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y|}{|\Delta z|} \leqq |\varepsilon'| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon''| + |\epsilon_2|$$

et par suite, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$, c'est-à-dire que $f(z)$ est dérivable pour $z = c$.

En résumé: Pour que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit *monogène* pour $z = c = a + ib$, il faut et il suffit:

1°) que P et Q soient différentiables au sens moderne au point (a, b),

2°) que, ces fonctions ayant alors nécessairement des dérivées partielles au point (a, b), celles-ci vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$P'_a = Q'_b, \quad P'_b = -Q'_a.$$

Remarque: Nous avons établi ce théorème en 1919 [17]. Quelques années plus tard, Mrs. Chisholm Young l'a indépendamment redécouvert et l'a appelé « Théorème fondamental de la théorie des fonctions complexes ».

Sixième Section

Différentielles successives.
Dérivées partielles du second ordre.

Avant de nous occuper des différentielles, disons quelques mots des dérivées partielles. On a longtemps admis implicitement que si f''_{xy} et f''_{yx} existent, elles sont égales. Pourtant leurs conditions d'existence sont différentes. Pour que f''_{xy} existe au point (a, b), il faut, et il suffit que $f'_x(x, y)$ existe pour y voisiu de b et ait une dérivée en y pour $y = b$, Pour que f''_{yx} existe an point (a, b), les conditions s'obtiennent en permutant x avec y, a avec b, dans les conditions précédentes.

C'est ce qui a permis à H. A. Schwarz de donner l'exemple de la fonction:

$$f(x, y) = x^2 \, arctg \frac{y}{x} - y^2 \, arctg \frac{x}{y}, \text{ quand } x^2 + y^2 \pm 0, \text{ et } f(o, o) = 0$$

pour laquelle

$$f''_{xy}(o, o) = 1 \quad \text{et} \quad f''_{yx}(o, o) = -1 .$$

Plus tard, Peano a donné, en 1884, l'exemple suivant:

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 \neq 0, f(o, o) = 0$$

pour lequel on a encore:

$$f''_{xy}(o, o) = 1, \quad f''_{yx}(o, o) = -1 .$$

Mais le même H. A. Schwarz a donné ensuite des conditions très générales sous lesquelles $f''_{ab} = f''_{ba}$. Sous une forme simple, on peut dire: il suffit que f''_{xy} et f''_{yx} existent au voisinage du point (a, b) et soient continues en ce point.

Thomae et Peano prouvent ensuite des conditions suffisantes très analogues, mais un peu plus générales: si f''_{xy} existe au voisinage de (a, b) et est continu en ce point, alors, f''_{ba} existe et est égal à f''_{ab}.

Enfin, en 1877, Dini obtient une condition encore très générale, mais un peu différente: pour que $f''_{ab} = f''_{ba}$, il suffit que

1°) f''_{xy} existe au voisinage de (a, b) et ait une limite quand le point (x, y) tend vers le point (a, b) et alors il montre que f''_{ab} existe nécessairement et est égal à cette limite, c'est-à-dire que f''_{xy} est continu au point a, b;

2°) $f'_y(x, b)$ a une dérivée en x pour $x = a$.

Nous renverrons pour les démonstrations de ces différentes propositions, aux pages 147-5 de l'ouvrage de Stolz [7].

Nous voyons que ces théorèmes ne supposent pas l'existence de f''_{a^2}, ni de f''_{b^2}.

Nous allons voir que W. H. Young a pu établir la même égalité dans un cas différent en utilisant la notion de différentielle.

Différentielle seconde: Par définition, une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle seconde au point (a, b) si

1°) $f(x, y)$ admet une différentielle du premier ordre df au voisinage du point (a, b);

2°) si pour Δx, Δy, constants, cette différentielle $f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$ admet elle-même une différentielle (correspondant à des accroissements $\Delta' x$, $\Delta' y$, en général, nouveaux).

Et alors cette dernière différentielle, nécessairement de la forme

$$d'df = (d'f'_x)\Delta x + (d'f'_y)\Delta y = (f''_{a^2}\Delta' x + f''_{ab}\Delta' y)\Delta x + (f''_{ba}\Delta' x + f''_{b^2}\Delta' y)\Delta y$$

sera appelée *la différentielle seconde* de $f(x, y)$ au point (a, b). *Une simplification:* on vient de voir qu'en supposant l'existence des dérivées partielles du premier et du second ordre de $f(x, y)$ *au voisinage* du point (a, b) *et la continuité* en ce point de f''_{xy} et f''_{yx}, on démontrait autrefois (1) que $f''_{ab} = f''_{ba}$. W. H. Young [9] a montré que cette égalité subsiste quand on suppose seulement que $f(x, y)$ est différentiable au second ordre *au point* (a, b). Soit

$$\delta = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Posons:

$$\delta(t) = f(a+h, b+ht) - f(a+h, b) - f(a, b+ht) + f(a, b).$$

On a $\delta(o) = 0$, $\delta(1) = \delta$. Or, d'après le théorème sur les fonctions composées $\delta(t)$ est dérivable et

$$\delta'(t) = h[f'_y(a+h, b+ht) - f'_y(a, b+ht)].$$

En appliquant le théorème de Rolle,

$$\delta = \delta(1) - \delta(o) = \delta'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Donc $$\delta = h[f'_y(a+h, b+h\theta) - f'_y(a, b+h\theta)].$$

Et puisque $f'_y\,(x, y)$ est différentiable au point (a, b),

$$\frac{\delta}{h^2} = (f''_{ba} + \varepsilon) + \theta(f''_{b^2} + \varepsilon') - \theta(f''_{b^2} + \varepsilon'')$$

ou

$$\frac{\delta}{h^2} = f''_{ba} + \omega\,, \tag{36}$$

avec

$$|\,\omega\,| = |\,\varepsilon + \theta(\varepsilon' - \varepsilon'')\,| \leqq |\,\varepsilon\,| + |\,\varepsilon'\,| + |\,\varepsilon''\,|\,,$$

où ε, ε', ε'' tendent vers zéro avec h et où, par suite, il en est de même de ω.

Or, on obtiendrait de façon analogue

$$\frac{\delta}{h^2} = f''_{ab} + \omega' \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \omega' = 0\,. \tag{37}$$

Dès lors en retranchant (36) de (37),

$$o = f''_{ba} - f''_{ab} + \omega - \omega'$$

et quand $\quad h \to 0$,

$$f''_{ba} = f''_{ab}\,. \tag{38}$$

Remarque: L'égalité (38) est prouvée par H. A. Schwarz en supposant que f''_{xy} et f''_{yx} existent au voisinage de (a, b) et sont continues en ce point et par W. H. Young, en supposant que f a une différentielle seconde au point (a, b).

Ces deux conditions coïncident quand elles sont vérifiées à la fois, mais Schwarz ne suppose pas l'existence de f''_{a^2} et de f''_{b^2}, même au point (a, b) et W. H. Young ne suppose pas que f''_{xy} et f''_{yx} existent près de (a, b) et y sont continues.

Suivant les cas, on pourra utiliser l'une ou l'autre des conditions de ces deux auteurs.

De l'égalité (38), on tire

$$d'df = \varDelta x \varDelta' x f''_{a^2} + (\varDelta x \varDelta' y + \varDelta x' \varDelta y) f''_{ab} + \varDelta y \varDelta' y f''_{b^2}$$

et en particulier

$$d^2f = \Delta x^2 f''_{a^2} + 2\Delta x \Delta y f''_{ab} + \Delta y^2 f''_{b^2}\,.$$

Grâce à cette simplification (38), on peut, connaissant seulement d^2f, reformer $d'df$; tandis que sans la relation (38), on ne pourrait déduire de d^2f une expression unique de $d'df$.

Différence seconde: Nous avons pu obtenir en 1912 [10, page 439] une formule qui montre qu'on pourrait calculer directement $d'df$ sans connaître df. Nous allons en rappeler ici la démonstration avec une petite variante.

La différence première de f étant de la forme:

$$\Delta f = \psi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y)\,,$$

la différence seconde de f sera de la forme

$$\Delta'\Delta f = \psi(a+h', b+k') - \psi(a, b)$$

ou

$$\Delta'\Delta f = [f(a+h+h', b+k+k') - f(a+h', b+k')] - [f(a+h, b+k) - f(a, b)]\,.$$

En posant:

$$\xi(t) = [f(a+ht+h', b+kt+k') - f(a+ht, b+kt)] - [f(a+h', b+k') - f(a, b)]\,,$$

on a

$$\xi(o) = o\,, \quad \xi(1) = \Delta'\Delta f$$

d'où

$$\Delta'\Delta f = \xi(1) - \xi(o)$$

et puisque $f(x, y)$ est différentiable près de (a, b), alors si h et k sont assez petits, en vertu du théorème des fonctions composées, $\xi(t)$ sera dérivable, et l'on aura d'après le théorème de Rolle

$$\Delta'\Delta f = \xi'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1\,,$$

d'où

$$\Delta'\Delta f = [hf'_x(a+h\theta+h', b+k\theta+k') + kf'_y(a+h\theta+h', b+k\theta+k')] - [hf'_x(a+h\theta, b+k\theta) + kf'_y(a+h\theta, b+k\theta)]\,.$$

Et si f'_x, f'_y sont différentiables pour $x = a$, $y = b$:

$$f'_x(a+\Delta x\,,\; b+\Delta y) - f'_x(a\,,\; b) = \Delta x\,[f''_{a^2}+\varepsilon] + \Delta y\,[f''_{ab}+\varepsilon']$$

avec $\lim \left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{matrix}\right\} = 0$ quand $|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$ et de même pour f'_y.

D'où

$$\Delta'\Delta f = h\{(h\theta+h')(f''_{a^2}+\varepsilon) + (k\theta+k')(f''_{ab}+\varepsilon') - h\theta(f''_{a^2}+\varepsilon_1) - k\theta(f''_{ab}+\varepsilon'_1)\} + k\{(h\theta+h')(f''_{ba}+\varepsilon_2) + (k\theta+k')(f''_{b^2}+\varepsilon'_2) - h\theta(f''_{ba}+\varepsilon_3) - k\theta(f''_{b^2}+\varepsilon'_3)\} = hh'f''_{a^2} + hk'f''_{ab} + kh'f''_{ba} + kk'f''_{b^2} + \eta$$

où $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \varepsilon_3, \varepsilon'_3$ tendent vers zéro avec $|h|+|k|+|h'|+|k'|$ et où

$$|\eta| \leqslant |h|\,|(h\theta+h')\varepsilon+(k\theta+k')\varepsilon' - h\theta\varepsilon_1 - k\theta\varepsilon'_1| + |k|\,|(h\theta+h')\varepsilon_2 + (k\theta+k')\varepsilon'_2 - h\varepsilon_3 - k\varepsilon'_\varepsilon| \leqslant 2(|h|+|k|)(|h|+|h'|+|k|+|k'|)(|\varepsilon|+|\varepsilon'|+|\varepsilon_1|+|\varepsilon'_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon'_2|+|\varepsilon_3|+|\varepsilon'_3|) = r(r+r')\lambda$$

où $r = |h|+|k|$, $r' = |h'|+|k'|$ et où $\lambda \to 0$ quand $r + r' \to 0$.

On peut donc écrire

$$\Delta'\Delta f - d'df = \eta = r(r+r')\mu$$

où $|\mu| < \lambda$, donc $\mu \to 0$ avec $r+r'$.

Mais de même en permutant h, k avec h', k' on a

$$\Delta'\Delta f - d'df = r'(r+r')\mu' \quad \text{où} \quad \mu' \to 0 \quad \text{avec} \quad r+r'.$$

Or $r(r+r') = rr'\left(1+\dfrac{r}{r'}\right)$ et $r'(r+r') = rr'\left(1+\dfrac{r'}{r}\right)$. L'un des rapports $\dfrac{r}{r'}$, $\dfrac{r'}{r}$ est $\leqslant 1$, on peut donc écrire:

$$\left|\frac{\Delta'\Delta f - d'df}{rr'}\right| \leqslant 2(|\mu| + |\mu'|).$$

D'où finalement

$$\Delta'\Delta f = d'df + \nu rr' \tag{39}$$

où $\lim v = 0$ *quand* $r + r' \to 0$, *et où* r *est une distance entre* (a, b) *et* (a+h, b+k), r′ *une distance entre* (a, b) *et* (a+h′, b+k′). De même qu'à la page 188, on peut prendre $r = \sqrt{h^2+k^2}$ ou $r = max$ ($|h|$ et $|k|$), aussi bien que $r = |h|+|k|$. Et de même pour r' exprimé en fonction de h' et k'. On notera l'analogie de la formule (39), avec la formule de Stolz pour le premier ordre:

$$\Delta f - df = \alpha r \quad \text{où} \quad \lim_{r \to 0} \alpha = 0 .$$

Si dans (39) on suppose $h' = h$, $k' = k$, on aura

$$\Delta^2 f - d^2 f = \rho r^2 \quad \text{avec} \quad \lim_{r \to 0} \rho = 0 . \tag{40}$$

En écrivant:

$$h = r \cos \varphi , \quad k = r \sin \varphi ,$$

on aura:

$$\cos^2 \varphi \, f''_{a^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi f''_{ab} + \sin^2 \varphi f''_{b^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\Delta^2 f}{r^2} \tag{41}$$

où

$$\Delta^2 f = f(a+2h , b+2k) - 2f(a+h , b+k) + f(a , b)$$

et

$$r^2 = h^2 + k^2 .$$

En particulier pour $k = 0$, pour $h = 0$ et pour $k = h$, on obtient:

$$f''_{a^2} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+2h , b) - 2f(a+h , b) + f(a , b)}{h^2} \tag{42}$$

$$f''_{b^2} = \lim_{k \to o} \frac{f(a , b+2k) - 2f(a , b+k) + f(a , b)}{k^2} \tag{43}$$

$$f''_{ab} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+2h , b+2h) - 2f(a+h , b+h) + f(a , b)}{h^2} \cdot \tag{44}$$

On a d'ailleurs obtenu plus haut, une autre expression

$$f''_{ab} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+h, b+h) - f(a, b+h) - f(a+h, b) + f(a, b)}{h^2} .$$

On voit ainsi qu'au moyen de la formule (39) ou des formules (42), (43), (44), on peut calculer d^2f *sans connaître la différentielle première* df.

Unicité. 1°) Restant encore dans le cas où $f(x, y)$ a une différentielle seconde au point (a, b), supposons qu'il existe trois nombres fixes, L, M, N, tels que:

$$\Delta^2 f = L\Delta x^2 + 2M\Delta x\Delta y + N\Delta y^2 + r^2\beta \tag{45}$$

avec $\lim_{r\to o} \beta = 0$.

Alors en comparant avec (40), on a

$$(L - f''_{a^2})\Delta x^2 + 2(M - f''_{ab})\Delta x\Delta y + (N - f''_{b^2})\Delta y^2 = r^2(\beta - \rho).$$

On pourra encore poser

$$\Delta x = r\cos\varphi, \Delta\ y = r\sin\varphi, \quad \text{d'où}$$

$$(L - f''_{a^2})\cos^2\varphi + 2(M - f''_{ab})\sin\varphi\cos\varphi + (N - f''_{b^2})\sin^2\varphi, = (\beta - \rho).$$

Pour $\sin\varphi$ constamment nul, on voit qu'en faisant tendre r vers zéro, on aura, puisque $\beta - \rho \to 0$ avec r, $L = f''_{a^2}$. De même pour $\cos\varphi$ constamment nul, $N = f''_{b^2}$.

En tenant compte de ces deux relations, il restera pour $\sin^2\varphi = 1$, $M - f''_{ab} = \beta - \rho$, d'où $M = f''_{ab}$.

Ainsi, sous la seule hypothèse que f a une différentielle seconde au point (a, b), la formule (45) n'est valable que pour une seule forme quadratique en Δx, Δy, soit $L\Delta x^2 + \ldots$, à savoir

$$d^2f = f''_{a^2}\Delta x^2 + 2f''_{ab}\Delta x\Delta y + f''_{b^2}\Delta y^2.$$

2°) On peut obtenir, moins simplement, il est vrai, un résultat plus général en partant de la formule ci-dessous, mais en supposant seulement que f a une différentielle première au voisinage (a, b) sans supposer d'avance l'existence d'une différentielle seconde au point (a, b). Ainsi on suppose que:

$$\Delta'\Delta f \equiv$$

$$f(a+h+h', b+k+k') - f(a+h, b+k) - f(a+h', b+k') + f(a,b) =$$

$$Lhh' + Mh'k + Mhk' + Nkk' + vrr', \tag{46}$$

où $v \to o$ avec $r + r'$.

Ceci étant, on aura en prenant $k' = o$ dans (46),

$$[f(a+h+h', b+k) - f(a+h, b+k)] - [f(a+h', b) - f(a, b)] = Lhh' + Mh'k + \rho r\,|h'|$$

où, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre η tel que $|\rho| < \varepsilon$ pour $|h| + |h'| + |k| < \eta$.

En particulier prenons $|h'| < \frac{\eta}{2}$, on aura

$$\frac{f(a+h+h', b+k) - f(a+h, b+k)}{h'} - \frac{f(a+h', b) - f(a, b)}{h'} = Lh + Mk + \nu r$$

où $|\nu| < \varepsilon$, pour $r = |h| + |k| < \frac{\eta}{2}$.

Quand $h' \to o$, les deux premiers termes du premier membre ont chacun une limite, (si η fixe est assez petit) et on a

$$f'_x(a+h, b+k) - f'_x(a, b) = Lh + Mk + \nu r \qquad (47)$$

avec encore $|\nu| < \varepsilon$ pour $r = |h| + |k| < \frac{\eta}{2}$ où η a été choisi convenablement après que ε a été choisi arbitrairement. C'est-à-dire, $\lim\limits_{r \to o} \nu = o$ et par suite: 1°) que f'_x est différentiable au point (a, b) et: 2°) que $L = f''_{a^2}$, $M = f''_{ab}$. De la même manière, on trouverait que f'_y est différentiable au point (a, b) et que $M' = f''_{ba}$, $N = f''_{b^2}$. Donc f *a une différentielle seconde au point* (a, b). Ainsi $f''_{ab} = f''_{ba}$ et

$$Lhh' + M(hk' + h'k) + Nkk' \equiv f''_{a^2} hh' + f''_{ab}(hk' + h'k) + f''_{b^2} hk'.$$

Ainsi, quand on a la formule (46), il suffit de supposer que f est différentiable *au voisinage du point* (a, b) pour être assuré

1°) *que* f *a une différentielle seconde au point* (a, b),

2°) *qu'il n'y a qu'une expression Lhh'* ... vérifiant la formule (46),

3°) que cette *expression est identique à la différentielle seconde* de f au point (a, b).

On notera même qu'on n'a pas eu à se servir de la différentiabilité de f, mais seulement de l'existence au voisinage de (a, b) des deux dérivées partielles $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ de f.

Formule de Taylor :

Supposons que $f(x, y)$ ait une différentielle seconde au point a, b. D'après la formule (39), on a en particulier, en y remplaçant h, k, h', k', par $h, 0, 0, k$,

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = hk(f''_{ab} + \varepsilon)$$

avec $\lim\limits_{|h|+|k| \to 0} \varepsilon = 0$.

Or on a les formules classiques de Taylor à une variable

$$f(a+h, b) = f(a, b) + hf'_a(a, b) + \frac{h^2}{2}(f''_{a^2}(a, b) + 2\varepsilon_1),$$

$$f(a, b+k) = f(a, b) + kf'_b(a, b) + \frac{k^2}{2}(f''_{b^2}(a, b) + 2\varepsilon_2)$$

avec $\lim\limits_{h \to o} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{k \to o} \varepsilon_2 = 0$. De ces trois relations, on tire

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf'_a(a, b) + kf'_b(a, b) + \tfrac{1}{2}[h^2 f''_{a^2}(a, b) +$$
$$2hkf''_{ab}(a, b) + k^2 f''_{b^2}(a, b)] + \varepsilon_1 h^2 + \varepsilon hk + \varepsilon_2 k^2 \qquad (48)$$

où le dernier membre peut se mettre sous la forme $\omega\ (h^2 + k^2)$ où $\omega \to o$ avec $h^2 + k^2$. *(48) est la forme de Taylor* limitée au second ordre, pour deux variables.

Différentielle d'ordre quelconque

Nous dirons qu'une fonction $f(x, y)$ est différentiable à l'ordre n au point (a, b) si:

1°) elle est différentiable au voisinage de ce point jusqu'à l'ordre $n-1$,

2°) si sa différentielle d'ordre $n-1$ est différentiable au point (a, b) pour toutes valeurs fixées des accroissements de x et y.

Nous avons défini plus haut les différentielles du premier et du second ordre. La définition précédente permet donc de définir successivement de façon précise les différentielles d'ordre 3, 4 ...

Ici encore, on retrouve les formes anciennes des différentielles d'ordre n et en particulier la formule symbolique ancienne:

$$d^n f(x\,,\,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

où l'on doit remplacer les puissances de ∂ comme des indices de dérivation.

Ce qui distinguera les définitions anciennes des définitions modernes, ce sera encore, pour les différentielles d'ordre n comme pour les différentielles premières, les conditions de différentiabilité et les propriétés des différentielles.

Pour ces dernières, nous renverrons encore aux cours d'analyse les plus récents, [14, 15, 16], qui établissent bien le parallélisme des propriétés des différentielles d'ordre supérieur entre le cas d'une et le cas de plusieurs variables. Il n'est pas utile de citer des exemples où l'ancienne définition de la différentiabilité d'ordre supérieur (réduite à l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles correspondantes) ne suffit pas à établir ce parallélisme, puisque déjà ce résultat a été obtenu plus tôt pour la différentielle première dont l'existence est nécessaire pour celle des différentielles successives.

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

LES ANCIENNES DÉFINITIONS

[1] E. Goursat, *Cours d'analyse*, 1e édition, 1902, t. I, p. 25, chez Gauthier-Villars.

[2] Humbert, *Cours d'analyse*, t. I, 1903.

[3] J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2e édition, 1904.

[4] Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, t. I, 1907, p. 71, Chez Gauthier-Villars.

[5] Camille Jordan, *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, 3e édition, 1909, t. I, pages 75-77.

[6] De la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse*, 2e édition, p. I, 1909.