

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE  
INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES  
**Autor:** Steinig, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39980>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

par J. STEINIG

## 1. INTRODUCTION

On sait que les hauteurs  $(h) = (h_1, h_2, h_3)$  d'un triangle et les rayons  $(r) = (r_1, r_2, r_3)$  de ses cercles exinscrits sont liés par la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad (1)$$

qui peut s'écrire aussi

$$M_{-1}(h) = M_{-1}(r).$$

$M_u(x)$  désigne ici la moyenne d'ordre  $u$  des nombres réels positifs  $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , définie par

$$M_u(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^u \right)^{1/u} & \text{pour } u \neq 0 \\ \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} & \text{pour } u = 0; \end{cases}$$

c'est une fonction continue et croissante de  $u$  sur l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ .

M. A. Małowski a donné une généralisation de (1) en démontrant dans [1] les inégalités

$$\begin{cases} M_u(h) \leq M_u(r) & \text{pour } u > -1 \\ M_u(h) \geq M_u(r) & \text{pour } u < -1. \end{cases} \quad (2)$$

Nous nous proposons de démontrer ici quelques autres résultats du même genre à l'aide de l'inégalité de Karamata.

## 2. L'INÉGALITÉ DE KARAMATA

Rappelons brièvement en quoi consiste cette inégalité. Si les nombres réels  $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(x') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  satisfont aux trois conditions

- (I)  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  ,  $x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq x'_n$  ,
- (II)  $x_1 + x_2 + \dots + x_v \leq x'_1 + x'_2 + \dots + x'_v$  ( $1 \leq v < n$ ) ,
- (III)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$  ,

nous dirons avec les auteurs de [2] que  $(x')$  majore  $(x)$ , et écrivons  $(x) < (x')$ .

M. J. Karamata a démontré [3] que si  $(x) < (x')$ , alors

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) + \dots + \phi(x_n) \leq \phi(x'_1) + \phi(x'_2) + \dots + \phi(x'_n) \quad (3)$$

pour toute fonction  $\phi$  continue et convexe dans un intervalle comprenant  $(x)$  et  $(x')$ . Si  $\phi$  est deux fois dérivable et  $\phi'' > 0$ , il n'y a égalité dans (3) que lorsque  $(x) \equiv (x')$ . L'inégalité (3) est évidemment renversée si  $\phi$  est concave, car  $-\phi$  est alors convexe.

M. M. Petrović a montré dans [4] que si la fonction  $f(x)$  possède au voisinage de  $x = 0$  un développement en série de puissances  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ , avec  $a_k \geq 0$  pour  $k \geq 2$ , alors

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq f(x_1 + x_2 + x_3) + 2f(0),$$

et M. le Professeur Karamata nous a indiqué que c'est précisément la lecture de cet article qui lui donna l'idée de l'inégalité (3).

## 3. QUELQUES APPLICATIONS

Soit  $A_1 A_2 A_3$  un triangle quelconque et  $a_i$  le côté opposé au sommet  $A_i$ , alors que  $m_i$  désigne la médiane passant par  $A_i$  et  $r_i$  le rayon du cercle exinscrit tangent à  $a_i$ .

Nous pouvons supposer que  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ , et donc que

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3 \quad \text{et} \quad m_1 \leq m_2 \leq m_3.$$

Nous démontrerons d'abord l'existence d'un nombre  $s$ ,  $0 < s < 1$ , tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) \leq M_u(r) \text{ pour } u > s \\ \frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) \geq M_u(r) \text{ pour } u < s. \end{array} \right. \quad (4)$$

En effet,  $\frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) - M_u(r)$  est une fonction continue de  $u$ , et M. F. Leuenberger a montré [5] qu'elle est positive pour  $u = 0$  et négative pour  $u = 1$ . Il existe donc une valeur  $s$  de la variable,  $0 < s < 1$ , pour laquelle  $\frac{\sqrt{3}}{2} M_s(a) - M_s(r) = 0$ .

De plus, on peut montrer que

$$a_i = \frac{r_i (r_{i-1} + r_{i+1})}{\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}}, \quad (5)$$

les indices étant pris mod 3; il s'ensuit facilement que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \leq r_1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} a_3 \geq r_3. \quad (6)$$

En raison de ces propriétés, et puisque  $s > 0$ , nous avons

$$a_1^s \geq a_2^s \geq a_3^s, \quad r_1^s \geq r_2^s \geq r_3^s,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s a_1^s \leq r_1^s,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s (a_1^s + a_2^s) \leq r_1^s + r_2^s,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s (a_1^s + a_2^s + a_3^s) = r_1^s + r_2^s + r_3^s.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Karamata en choisissant pour  $\phi$  les fonctions convexes définies par

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^{u/s} \quad (x > 0) \quad \text{pour } u < 0 \text{ ou } u > s, \\ \phi(x) &= -x^{u/s} \quad (x > 0) \quad \text{pour } 0 < u < s, \\ \phi(x) &= -\log x \quad (x > 0),\end{aligned}$$

pour voir que (4) a lieu. Si  $u \neq s$ , il n'y a égalité que lorsque  $\sqrt{3} a_i = 2r_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.

Montrons maintenant en suivant le même raisonnement qu'il existe une valeur  $t$ ,  $0 < t < 1$ , telle que

$$\begin{cases} M_u(m) \leq M_u(r) \text{ pour } u > t \\ M_u(m) \geq M_u(r) \text{ pour } u < t; \end{cases} \quad (7)$$

c'est évidemment une inégalité plus précise que celle de Małowski pour  $u \geq t$ .

Les inégalités  $M_0(m) \geq M_0(r)$  et  $M_1(m) \leq M_1(r)$  sont démontrées dans [5]. Il ne reste donc plus à montrer que  $m_1 \geq r_3$  et  $m_3 \leq r_1$ .

Pour prouver la première de ces inégalités, rappelons que

$$4m_i^2 = 2(a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2) - a_i^2, \quad (8)$$

d'où  $4m_i^2 \geq (a_{i-1} + a_{i+1})^2 - a_i^2,$

soit  $m_i \geq \sqrt{r_{i-1} r_{i+1}},$

et en particulier  $m_1 \geq \sqrt{r_2 r_3} \geq r_3.$

D'autre part, on voit en appliquant les formules (5) et (8) que l'inégalité  $m_3 \leq r_1$  est équivalente à

$$2[r_2^2(r_1 + r_3)^2 + r_1^2(r_2 + r_3)^2] - r_3^2(r_1 + r_2)^2 \leq 4r_1^2 \cdot \sum_{i < j} r_i r_j,$$

ou encore à

$$r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2 + 4r_1^2 r_2^2 + 4r_1 r_2^2 r_3 \leq 4r_1^2 (r_1 r_2 + r_1 r_3) + 2r_1 r_2 r_3^2,$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$4r_1 r_3 (r_1^2 - r_2^2) + (r_1 - r_2) [4r_1^2 r_2 - r_3^2 (r_1 - r_2)] \geq 0. \quad (9)$$

Or, on a manifestement  $r_1 r_2 \geq r_3^2$  et  $4r_1 > r_1 - r_2$ , et le produit de ces deux inégalités positives donne  $4r_1^2 r_2 > r_3^2 (r_1 - r_2)$ . Puisqu'on a encore  $r_1 \geq r_2$ , aucun des termes du côté gauche de (9) n'est négatif, ce qui démontre cette inégalité.

Nous avons donc

$$M_0(r) \leq M_0(m) \quad \text{et} \quad M_1(r) \geq M_1(m),$$

$$r_3 \leq m_1 \quad \text{et} \quad r_1 \geq m_3;$$

c'est dire qu'il existe un  $t^1$ ,  $0 < t < 1$ , tel que  $(m^t) < (r^t)$ .

L'inégalité (7) se trouve ainsi démontrée, et il est facile de voir qu'il n'y a égalité que dans le cas d'un triangle équilatéral.

Pour conclure, remarquons qu'il ne peut exister d'inégalité générale entre  $\frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a)$  et  $M_u(m)$ ; ceci est une conséquence immédiate d'un théorème d'Euler [6] qui affirme qu'on peut construire avec les médianes  $m_i$  du triangle  $A_1 A_2 A_3$  un nouveau triangle dont les médianes sont alors  $\frac{3}{4} a_i$ . Par contre, on sait qu'il existe certaines égalités; on voit aisément avec (8) qu'on a toujours

$$\frac{\sqrt{3}}{2} M_2(a) = M_2(m) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} M_4(a) = M_4(m).$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. MAKOWSKI, « Inequalities for a Triangle », *El. Math.* 16 (1961), 60-61.
- [2] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA. « Inequalities », *Cambridge University Press* (second edition, 1959), aux pages 45 et 89.
- [3] J. KARAMATA, « Sur une inégalité relative aux fonctions convexes », *Publ. math. Univ. Belgrade*, 1 (1932), 145-148.
- [4] M. PETROVIĆ, « Sur quelques fonctions des côtés et des angles d'un triangle », *Enseignement math.* 18 (1916), 153-163.
- [5] F. LEUENBERGER, « Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel », *El. Math.* 16 (1961), 127-129.
- [6] Leonhardi EULERI, *Opera Omnia*, Series I, Vol. 4 (Commentationes Arithmeticae 3), aux pages XXI et 298.

(Reçu le 30 juin 1964)

J. Steinig  
5, rue Toeffler  
Genève

<sup>1</sup>) La valeur exacte de  $t$ , comme celle de  $s$ , dépendra du choix de  $a$ ; par exemple,  $s > \frac{1}{4}$  lorsque  $(a) = (3, 4, 5)$ , au lieu que  $s < \frac{1}{4}$  si  $(a) = (2, 24, 24)$ .

**Vide-leer-empty**