Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OVALES ET OVOÏDES

Autor: Ehrhart, E.

Kapitel: III. Théorèmes curieux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40725

indiqué les raisons pour lesquelles on peut très probablement remplacer dans cet énoncé « centre de symétrie » par « centre de gravité », si l'on remplace la mesure critique 2^n par $\frac{(n+1)^n}{n!}$ et le mot « parallélotope » par « simplexe ». En particulier je l'ai démontré pour $n = 2$ (11): « Si le centre de gravité d'un ovale est placé en un point entier 0 d'un réseau, dont une base est un carré de côté 1, et que son aire est supérieure à $\frac{9}{2}$, il renferme un point entier autre que 0; il existe une infinité de triangles d'aire $\frac{9}{2}$, dont le centre de gravité est le seul point entier intérieur. »

Théorème des points entiers. — Cette année également, j'ai établi dans *l'Enseignement Mathématique* (12) le résultat suivant: « Soient S et l l'aire et le périmètre d'un ovale situé dans le plan d'un réseau orthonormé, et j le nombre de points entiers situés dans l'ovale ou sur son bord. Alors $j \leqslant S + \frac{l}{2} + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des rectangles. » Dans la même note j'ai établi des bornes analogues pour le j d'un ovoïde. Mais je n'ai pu démontrer que pour certaines familles de corps convexes, l'intéressante conjecture suivante: « Soient V et S le volume et la surface d'un ovoïde, et a, b, c ses hauteurs dans la direction des axes d'un réseau orthonormé. Alors $j \leqslant V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des parallélépipèdes rectangles. » (A fortiori, si D désigne le diamètre de l'ovoïde, $j < V + \frac{S}{2} + 3D + 1$, borne non stricte, mais qui a l'avantage d'être invariante par rapport aux déplacements.)

III. Théorèmes curieux

Peut être vous rappelez-vous comme moi de l'étonnement qui fut le vôtre, le jour où pour la première fois on vous a parlé de la roue de Reuleau: il y a une infinité d'ovales, autres que le cercle, qui ont même hauteur dans toutes les directions. C'est que dans le domaine qui nous occupe, il faut se méfier tout particulièrement de l'intuition. On s'en rend compte en essayant de répondre aux questions suivantes, dont on lira plus loin les réponses.

Questions :

1) Quels sont les ovoïdes dont toute section plane a un centre de symétrie ?
2) Quels sont les ovoïdes dont tous les contours apparents sont plans ?
3) Quels sont les ovoïdes (solides homogènes) qui restent en équilibre sur un plan horizontal en toute position ?
4) L'ellipse est-elle le seul ovale ayant un cercle orthoptique ?
5) Existe-t-il des ovales non circulaires ayant un point intérieur tel que toutes les cordes qui y passent soient égales ?
6) Existe-t-il un ovale ayant deux tels points ?

Réponses :

1) et 2) l'ellipsoïde seulement;
3) la sphère seulement;
4) non;
5) oui, une infinité pour chaque longueur donnée de la corde;
6) non.

IV. Théorèmes d'extrema

Tout le monde sait qu'à volume donné l'ovoïde de surface minimum est la sphère; cela ne signifie pas que la démonstration en soit facile.

A volume donné, l'ovoïde de plus petit diamètre est la sphère.

A volume et à hauteur donnés, quel est l'ovoïde de révolution de surface maximum? C'est un cylindre, un cône ou un tronc de cône, suivant la valeur du rapport $\frac{h^3}{V}$.

A largeur donnée, l'ovale de plus petite surface est le triangle équilatéral.