

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1966)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA THÉORIE DE S. STOILOW DES RECOUVREMENTS RIEMANNIENS  
**Autor:** Cazacu, Cabiria Andreian  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40730>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA THÉORIE DE S. STOILOW DES RECOUVREMENTS RIEMANNIENS <sup>1)</sup>

par Cabiria ANDREIAN CAZACU

Dès le dernier siècle, dans l'œuvre de Cauchy et de Gauss, mais surtout dans celle de Riemann, l'interprétation géométrique des fonctions d'une variable complexe comme des transformations d'un plan ou d'une surface dans une autre et la recherche de leurs propriétés géométriques ont enrichi la théorie des fonctions analytiques par maints résultats fondamentaux. Cette direction de recherche s'est montrée plus féconde encore dans notre siècle quand le développement de la théorie des ensembles, de la topologie, de l'algèbre moderne, imprégnées par l'esprit de la méthode axiomatique, ont permis de pénétrer plus profondément dans la nature de l'analyticité. C'est dans cette époque et dans cet esprit d'analyse rigoureuse des fondements des mathématiques et de vastes synthèses, que s'est forgé une nouvelle discipline — la théorie topologique des fonctions analytiques, dont le créateur a été le professeur Simion Stoilow.

Formé sous l'influence de l'illustre pléiade des mathématiciens français: E. Picard, H. Poincaré, J. Hadamard, E. Borel, H. Lebesgue, le professeur Stoilow commence son œuvre par d'importants travaux dans la théorie des équations aux dérivées partielles, qui ont été continués par St. Bergman, L. Fantappié, H. Lewy et récemment par J. Leray.

Après la première guerre mondiale, il se consacre à la théorie des ensembles, des fonctions réelles et de la topologie, mais il ne quitte pas sa préoccupation principale, l'étude de l'analyticité. Ainsi les résultats profonds qu'il obtient sur les transformations continues apparaissent comme une introduction à la théorie des *transformations intérieures*, notion qu'il définit en 1927 et qui constitue la base de la théorie topologique des fonctions analytiques.

---

<sup>1)</sup> Conférence donnée au Colloque sur la Géométrie différentielle globale, Bucarest, 1964.

Comme on le sait, à cette époque le célèbre problème de Brouwer relatif à la *caractérisation topologique des fonctions analytiques* préoccupait un grand nombre de mathématiciens: K. Szillard, O. Onicescu, M. Zorn y ont apporté leur contribution; d'autre part on poursuivait aussi la généralisation métrico-topologique de l'analyticité, direction qui conduisit à l'étude des fonctions polygènes et plus tard de la quasi-conformité, et qui fut illustrée dans notre pays par D. Pompeiu, M. Nicolescu, G. Călugăreanu, Gr. Moisil, N. Teodorescu, N. Ciorănescu. C'est ainsi que le mémoire de S. Stoilow « Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques » (1928), qui donnait la solution du problème de Brouwer, a joui d'un succès tout à fait remarquable.

Etant donnés deux espaces topologiques  $V$  et  $S$ , une transformation intérieure au sens de S. Stoilow est une application  $T: V \rightarrow S$  continue, ouverte et 0-dimensionnelle. Aussi bien les fonctions analytiques que les transformations topologiques des surfaces (variétés topologiques 2-dimensionnelles) sont des transformations intérieures. D'autre part, S. Stoilow montre que: Etant donnée une transformation intérieure arbitraire  $T$  d'une surface  $V$  dans la sphère complexe  $S$ , il existe toujours un homéomorphisme  $H$  de  $R$ , une surface de Riemann abstraite au sens de Weyl et Radó, sur  $V$  telle que  $T \circ H$  soit une fonction analytique sur  $R$ . C'est-à-dire, on peut toujours introduire sur  $V$  une structure conforme, telle que  $T$  devienne une fonction analytique <sup>1)</sup>. Par conséquent, les transformations intérieures caractérisent du point de vue topologique les fonctions analytiques. Le caractère topologique des théorèmes classiques relatifs au maximum du module, aux zéros et à l'inversion des fonctions analytiques, résulte comme une conséquence immédiate de ce mémoire.

D'autres travaux de S. Stoilow concernant les transformations intérieures, introduisent les importantes notions de recouvrement total ou partiellement régulier.

D'après S. Stoilow, une suite de points d'une surface *tend vers la frontière* de cette surface, s'il n'admet pas de points d'accumulation dans cette surface.

---

<sup>1)</sup> Récemment, Fl. Bucur approfondit ces résultats du point de vue de la théorie des catégories et donna des propriétés algébriques des transformations intérieures.

Le recouvrement de  $S$  par  $V$  selon la transformation intérieure  $T$  est dit *total* si à toute suite  $P_k$  de  $V$  tendant vers la frontière de  $V$ , correspond par  $T$  une suite  $p_k = T(P_k)$  de  $S$ , tendant vers la frontière de  $S$ . Alors  $T(V) = S$  et la pré-image d'un point quelconque de  $S$  consiste dans le même nombre  $n$  de points de  $V$  comptés avec leur multiplicité: c'est le nombre des feuillets. Si  $V$  et  $S$  ont les caractéristiques d'Euler  $\rho$ , resp.  $\rho_0$ , la formule de Hurwitz donne l'ordre total de ramification algébrique  $r$  du recouvrement

$$r = \rho - n \rho_0 . \quad (1)$$

De même le recouvrement de  $S$  par  $V$  selon  $T$  est *partiellement régulier*, s'il remplit les conditions suivantes:

( $\beta_1$ ) Toute suite de points  $P_k$  de  $V$ , qui tend vers la frontière de  $V$ , se projette sur une suite de points  $T(P_k)$  de  $S$ , qui tend vers la frontière de  $S$  ou vers un nombre fini de courbes de Jordan  $\gamma$ , deux à deux disjointes, chacune frontière commune à deux domaines disjoints  $D_j$ ,  $D_j$  étant les composantes connexes de  $S - \gamma$ .

( $\beta_2$ ) Le pré-image  $T^{-1}(\gamma)$  est compacte dans  $V$  ou vide.

Chaque  $D_j$  est recouvert totalement ou pas du tout par  $V$ . Soient  $n_j$  le nombre des feuillets de  $V$  sur  $D_j$ ,  $\rho_j$  la caractéristique de  $D_j$ ,  $\rho$  celle de  $V$  (comme plus haut). S. Stoilow a généralisé la formule de Hurwitz pour les recouvrements partiellement réguliers

$$r = \rho - \sum n_j \rho_j . \quad (2)$$

Il établit des critères de biunivocité pour les transformations intérieures et les homéomorphismes locaux, et approfondit les fonctions de Pompeiu, les valeurs exceptionnelles et asymptotiques des fonctions analytiques, les transformations presque analytiques de M. A. Lavrentieff. Ces problèmes ont été repris par S. Eilenberg, S. Banach et S. Mazur, E. Szpilrajn et S. Kierst.

D'année en année, l'importance de la notion de transformation intérieure s'est de plus en plus affirmée. Elle a trouvé un vaste champ d'application dans la topologie générale: N. Aronszajn, S. Mazurkiewicz, G. Th. Whyburn ont approfondi sous différents aspects les transformations intérieures entre des

espaces topologiques; M. Morse, M. Heins, J. A. Jenkins les ont appliquées à différents problèmes et tout particulièrement à l'étude des fonctions pseudo-harmoniques. Actuellement, dans la théorie des applications quasi-conformes, on prend comme point de départ les transformations intérieures de Stoïlow, auxquelles on ajoute certaines conditions métriques (c'est le point de vue de L. V. Ahlfors, K. Noshiro, A. Pfluger, L. I. Volkovyski, J. Hersch, H. Künzi, etc.) et même si certaines recherches (par exemple celles de R. Cacciopoli, Y. Tôki et K. Shibata, I. N. Pesin, L. Bers) partent d'une autre définition, on démontre le caractère intérieur de la transformation. L'étude des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant le système de Cauchy-Riemann se rattache aussi à ces transformations. Des concepts introduits par S. Stoïlow et se rapportant aux transformations intérieures (application propre, application 0-dimensionnelle) se sont révélés plus tard essentiels non seulement en topologie, mais aussi dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

A l'aide des transformations intérieures, S. Stoïlow a résolu un second problème fondamental de la théorie des fonctions analytiques: *la définition des recouvrements riemanniens*. En effet, la notion de surface de Riemann donnée par H. Weyl en 1913 et précisée par T. Radó en 1925, qui est utilisée avec succès dans la théorie des représentations conformes et de l'uniformisation, ne renferme pas toute la richesse du concept introduit par Riemann, car elle fait abstraction de tout élément se rattachant au mode de recouvrement et ne peut pas être appliquée aux recherches relatives aux points de ramifications et aux feuilletts.

Au Congrès international d'Oslo (1936), S. Stoïlow définit le recouvrement riemannien comme un recouvrement de la sphère ou, plus généralement, d'une surface  $S$  par une surface  $V$  selon une transformation intérieure (un tel recouvrement sera désigné dans la suite par  $S_T^V$ ). De cette manière, S. Stoïlow créa un instrument nouveau et puissant de recherche, dont l'importance a été soulignée dans tous les traités modernes de la théorie des fonctions et des surfaces de Riemann (A. I. Markouchewitch (1965), R. Nevanlinna (1953), H. Behnke et F. Sommer (1955), A. Pfluger (1957), L. V. Ahlfors et L. Sario (1960)).

En 1938 parut, dans la célèbre collection Borel, le travail fondamental du professeur Stoïlow: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, dont une seconde édition de 1956 est complétée par les travaux ultérieurs de l'auteur. Cette monographie profondément originale se distingue par la richesse des résultats et la maîtrise avec laquelle l'auteur passe de l'intuition concrète des faits géométriques aux généralisations les plus abstraites.

Parmi les nouveaux résultats que S. Stoïlow présente dans ce livre, nous soulignons la *caractérisation topologique* des surfaces de Riemann abstraites (c'est-à-dire des surfaces qui peuvent être munies d'une structure conforme): ce sont les surfaces triangulables et orientables.

De même il compléta la théorie de l'homéomorphie des surfaces en étudiant la notion de frontière idéale due à Kerékjártó: il définit la suite déterminante d'un élément frontière et introduisit une topologie sur l'ensemble obtenu en complétant la surface de Riemann par la totalité des éléments frontière.

Cette frontière, qu'on nomme aujourd'hui *frontière Kerékjártó-Stoïlow*, joue un rôle fondamental dans la théorie moderne des surfaces de Riemann. Les frontières conformes de Martin, de Kuramochi, de Royden, et celle introduite par Constantinescu-Cornea, que leurs auteurs appellent frontière de Wiener, apparaissent comme des raffinements de la frontière de Kerékjártó-Stoïlow. Elle est utilisée dans le problème de la classification des surfaces de Riemann. Par une vaste généralisation du théorème classique de Liouville, R. Nevanlinna, L. V. Ahlfors, L. Sario et d'autres ont défini différentes classes de surfaces de type  $\mathcal{O}$ . Le critère consiste dans la non-existence sur la surface, de certaines classes de fonctions non constantes. On a démontré ensuite que l'appartenance à quelques-unes de ces classes est une propriété de la frontière (un des premiers résultats dans ce sens est dû à T. Kuroda et concerne la classe  $\mathcal{O}_{AB}^{\circ}$ ) et à l'aide de la frontière Kerékjártó-Stoïlow, on a introduit de nouvelles classes de surfaces, par exemple la classe des surfaces à frontière absolument discontinue  $\mathcal{C}_7$  de Sario).

La frontière Kerékjártó-Stoïlow sert de base aussi pour les recherches sur le comportement à la frontière des fonctions ana-

lytiques et harmoniques de O. Lehto, M. Heins, K. Oikawa, etc. L'étude systématique de la frontière des surfaces de Riemann entreprise par C. Constantinescu et A. Cornea, qui est synthétisée dans leur monographie: « Ideale Ränder Riemannscher Flächen » (Springer, 1963) les a conduit à la généralisation des théorèmes de Fatou-Nevanlinna, Plessner, Riesz, Beurling sous des formes qui apportent des précisions même dans le cas classique du cercle et à l'introduction des applications de type Fatou et de type Dirichlet; ils ont mis en évidence une dualité profonde entre les fonctions de classe  $HB$  et  $HD$ .

Un autre problème important dont la solution a été obtenue à l'aide de la frontière Kerékjártó-Stoïlow est celui du prolongement des surfaces de Riemann. M. Jurchescu a caractérisé la classe des surfaces de Riemann essentiellement non susceptibles de prolongement et a déterminé ses rapports avec les classes de type  $\mathcal{O}$ . Il a montré qu'il existe des surfaces de Riemann à prolongement maximal topologiquement, mais pas analytiquement unique et a déduit l'existence des homéomorphismes Pompeiu quasi-linéaires.

La frontière idéale Kerékjártó-Stoïlow intervient aussi dans la notion de métrique harmonique sur une surface de Riemann due à N. Boboc et Gh. Mocanu et qui permet de généraliser maints théorèmes classiques.

En introduisant une relation d'ordre dans l'ensemble des compactifications des espaces topologiques, N. Boboc et Gh. Sirețchi ont obtenu une lattice, la frontière Kerékjártó-Stoïlow étant à ce point de vue la plus grande compactification à frontière totalement discontinue.

Parallèlement à la classification des surfaces abstraites de Riemann, S. Stoïlow mit le problème d'une classification à partir des propriétés de recouvrement. Dans ce sens il introduisit deux classes importantes de recouvrements riemanniens: la classe  $I$  et celle des recouvrements normalement exhaustibles.

Dès 1931, S. Stoïlow releva l'importance de la propriété d'Iversen, qu'il a dénommée ainsi parce qu'en 1914, F. Iversen l'avait démontrée pour les inverses des fonctions méromorphes.

Un recouvrement riemannien  $S_T^V$  est dit de classe  $I$  (ou possédant la propriété d'Iversen) si, quels que soient le domaine  $\delta \subset S$

et la composante connexe  $\Delta$  de  $T^{-1}(\delta)$  sur  $V$ , l'ensemble  $\delta - T(\Delta)$  ne contient aucun continu. S. Stoilow a précisé le comportement des recouvrements de classe  $I$  au voisinage des éléments de la frontière (1952). On a découvert d'importantes classes de surfaces de Riemann, dont toutes les réalisations possibles comme surfaces de recouvrement ont la propriété d'Iversen: la classe  $\mathcal{O}_G$  (résultat dû à S. Stoilow, 1943), la classe  $\mathcal{O}_{HB}$  (A. Mori, 1951), la classe  $\mathcal{O}_{AB}^o$  (T. Kuroda, 1953), etc. D'autre part, on a trouvé des classes de fonctions analytiquement définies qui engendrent des recouvrements riemanniens avec la propriété  $I$  sur la sphère complexe. Ainsi S. Stoilow a démontré en 1936 que les fonctions  $\omega = \omega(z)$  définies par une relation entière ont cette propriété. Rappelons aussi le résultat suivant de M. Jurchescu: Toute application holomorphe dont la frontière accessible est réunion dénombrable d'ensembles polaires (par exemple les fonctions rationnelles d'une intégrale d'équation différentielle algébrique d'ordre  $\leq 2$ ) est localement  $BL$  (au sens de M. Heins), donc a la propriété  $I$ .

Une seconde classe de recouvrements riemanniens fut définie par S. Stoilow en 1938: c'est la classe des recouvrements normalement exhaustibles, extension naturelle des recouvrements clos.

Soit encore  $S_T^V$  un recouvrement riemannien. Une suite de domaines fermés  $V_k$  de  $V$ , avec les propriétés:  $V_k \subset \overset{\circ}{V}_{k+1}$  et  $\cup V_k = V$ , forme une exhaustion de  $V$ .

Le recouvrement  $S_T^V$  est dit *normalement exhaustible* s'il existe une suite d'exhaustion  $V_k$  de  $V$ , telle que  $V_k$  soit compact et que l'intérieur de  $V_k$  recouvre totalement sa projection par  $T$ .

S. Stoilow a donné des exemples de tels recouvrements: ceux engendrés par les fonctions entières d'ordre  $< \frac{1}{2}$ , ou par la fonction de Lusin et Priwaloff; il a démontré des théorèmes concernant la répartition des valeurs (1940). G. Th. Whyburn a aussi étudié ces recouvrements (1950). Elève du professeur Stoilow, j'ai obtenu moi-même des résultats sur les recouvrements normalement exhaustibles (1952-56) dont nous allons parler dans la suite, mais en les présentant d'un point de vue plus général: à savoir, nous prenons comme base pour une théorie unitaire des recouvrements riemanniens l'étude d'une



exhaustion de ce recouvrement et nous choisissons l'exhaustion polyédrique, puisque tout recouvrement peut être donné à l'aide d'une telle exhaustion.

1. *Recouvrement polyédrique.* — Soit  $S_T^V$  un recouvrement riemannien qui vérifie la condition  $(\beta_1)$  par rapport à un ensemble fini  $\gamma$  de courbes de Jordan deux à deux disjointes et d'arcs de Jordan à extrémités bien déterminées dans des points ou des éléments frontière de  $S$ , tel qu'en désignant par  $\mathcal{N}$  l'ensemble des extrémités qui appartiennent à  $S$ , et que nous appellerons noeuds, l'intersection d'un arc avec un autre ou avec une courbe soit contenue dans  $\mathcal{N}$ . Définissons maintenant une condition  $(\beta_2)$  locale: le point  $p$  de  $\gamma$  a la propriété  $(L\beta_2)$ , s'il existe un voisinage  $\nu$  de  $p$  tel que la pré-image de la composante connexe de  $\nu \cap \gamma$  qui contient  $p$ , soit formée de composantes connexes relativement compactes ou soit vide. Soit  $E$  l'ensemble des points  $p \in \gamma$  sans la propriété  $(L\beta_2)$  et appelons ces points exceptionnels. Nous démontrons que si  $V$  a la caractéristique d'Euler finie, il existe sur  $\gamma$  un nombre fini de points exceptionnels au plus. Il en résulte aussi un nombre fini de points de ramifications.

Nous dirons que le recouvrement  $S_T^V$  est *polyédrique* (ou  $P$ ) s'il remplit la condition  $(\beta_1)$  par rapport à un ensemble de courbes  $\gamma$  avec les propriétés mentionnées plus haut et si  $V$  a une caractéristique finie. Une exhaustion  $V_k$  d'un recouvrement riemannien  $S_T^V$  sera appelée *polyédrique* (ou  $P$ ) si  $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$  est un recouvrement  $P$ .

Remarquons que si  $S$  et  $V$  sont des surfaces de Riemann et  $T$  une application analytique  $V \rightarrow S$ , tout domaine polyédrique  $W \subset V$ , dont la frontière consiste dans un nombre fini de courbes de Jordan analytiques ou formées d'un nombre fini d'arcs analytiques, engendre un recouvrement  $S_T^{\overset{\circ}{W}}$  polyédrique, donc tout recouvrement riemannien admet des exhaustions polyédriques, ce qui assure un vaste champ d'application aux résultats que nous obtenons. D'ailleurs même les recouvrements  $S_T^V$ , définis à l'aide d'une exhaustion par des surfaces bordées non compactes  $V_k$ , sont inclus dans nos considérations, car  $\overset{\circ}{V}_k$  admet une exhaustion polyédrique  $V_{kj}$  et en choisissant

les indices  $j_k$  tels que  $V_{kj_k} \subset \overset{\circ}{V}_{k+1 j_{k+1}}$ , les recouvrements  $S_T^{\overset{\circ}{V}_{kj_k}}$  forment une exhaustion polyédrique de  $S_T^V$ .

En ajoutant des conditions convenables relatives aux ensembles  $\gamma_k = T(\Gamma_k)$ , ( $\Gamma_k = \partial V_k$ ) ou aux recouvrements  $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ , nous obtenons différentes classes de recouvrements riemanniens. Par exemple, nous avons étudié les recouvrements partiellement régulièrement exhaustibles ( $S_T^V$  qui admet une exhaustion  $V_k$ , tel que  $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$  soit partiellement régulier), les recouvrements  $\mathcal{E}$ -quasi-normalement exhaustibles ( $S_T^V$  avec les propriétés suivantes:  $\mathcal{E}$  étant un sous-ensemble propre, fermé de  $S$  et  $D_j$  — les composantes connexes de  $S - \mathcal{E}$ , il existe les exhaustions à domaines polyédriques  $V_k$  de  $V$  et  $D_{jk}$  de  $D_j$ , ayant respectivement les frontières  $\Gamma_k$  et  $\gamma_{jk}$  formées chacune d'un nombre fini de courbes de Jordan, deux à deux disjointes, et telles que  $T(\Gamma_k) \subset \gamma_k = \bigcup_j \gamma_{jk}$ . Ces recouvrements ont été étudiés aussi par T. Kuroda, L. I. Volkovyski, R. Osserman), etc. D'autres exemples d'exhaustions polyédriques se trouvent dans l'œuvre de R. Nevanlinna, L. V. Ahlfors, S. Kobayashi, H. Wittich, H. Renggli, A. A. Goldberg, etc.

2. *Ensembles limites.* — Afin d'étudier les recouvrements riemanniens en partant d'une exhaustion  $P$ , définissons les *ensembles limites* suivants:

- $\mathcal{E}$  — l'ensemble des points  $p \in S$ , limites de suites de points  $p_{kj} \in \gamma_{kj}$ : 
$$p = \lim_{p_{kj} \in \gamma_{kj}} p_{kj},$$
- $\mathcal{M}$  — l'ensemble des points  $p \in S$ , limites de points  $p_k \in \gamma_k$ : 
$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k,$$
- $\mathcal{A}$  — l'adhérence de l'ensemble des valeurs asymptotiques de  $T$ ,
- $\mathcal{R}$  — l'ensemble des limites des suites de projections de points de ramifications de  $S_T^V$ .

Evidemment,  $S \supset \mathcal{E} \supset \mathcal{M} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{O}$  et chacune de ces inclusions peut être stricte ou non. Les ensembles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M}$  dépendent de l'exhaustion considérée. Si nous prenons une sous-suite

$V_j = V_{kj}$  de  $V_k$ , les ensembles  $\tilde{\mathcal{E}}$  et  $\tilde{\mathcal{M}}$  satisfont aux inclusions  $\mathcal{E} \supset \tilde{\mathcal{E}} \supset \tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$ .

Etant donné un recouvrement  $S_T^V$ , nous pouvons remplacer tout de suite  $V_k$  d'exhaustion  $P$  par une autre  $\tilde{V}_k$  telle que:  $\tilde{\Gamma}_k$  ne contienne pas des points de ramification, et  $\tilde{\gamma}_k$  se trouve dans un voisinage arbitraire de  $\gamma_k$ , ce qui ne change pas les ensembles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M}$ .

Soit  $\mathcal{E} \neq S$ . Nous allons énumérer quelques-unes des propriétés locales des recouvrements riemanniens formulées à l'aide des ensembles, que nous avons introduits:

Soit  $\delta$  un domaine de  $S$  et  $\Delta \subset V$  une des composantes connexes de sa pré-image  $T^{-1}(\delta)$

- i) Si  $\delta$  est relativement compact dans  $S - \mathcal{E}$ , le recouvrement  $\delta_T^A$  est total;
- ii) Si  $\delta \subset S - \mathcal{E}$ , alors  $S_T^A$  est normalement exhaustible;
- iii) Si la frontière relative  $\partial \delta$  est contenue dans  $S - \mathcal{E}$  et compacte, et de plus, si  $\gamma_k \cap \delta$  consiste dans un nombre fini de courbes de Jordan, deux à deux disjointes et présentant la propriété  $(L\beta_2)$  relativement à  $S_T^{\hat{V}_k}$ , alors  $S_T^A$  est partiellement régulièrement exhaustible. (Les conditions concernant  $\gamma_k \cap \delta$  sont évidemment remplies lorsque  $S_T^V$  est partiellement régulièrement exhaustible lui-même.)

3. *Relations entre diverses classes de recouvrements.* — Tout point  $p \in S - \mathcal{A} - (\mathcal{R} \cap \mathcal{M})$  admet un voisinage fermé recouvert totalement par chacune des composantes connexes de sa pré-image. Des exemples montrent que cette propriété peut encore persister pour les points  $p \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{M}) - \mathcal{A}$ , mais elle cesse au cas  $p \in \mathcal{A}$ . Il en résulte les propriétés  $LBL_1$  pour les points  $p \in S - \mathcal{A} - (\mathcal{R} \cap \mathcal{M})$  et  $LBL$  pour  $p \in S - \mathcal{A}$ . Evidemment, si  $\mathcal{A}$  est de capacité logarithmique nulle  $S_T^V$  est de classe  $Bl$  et si  $\mathcal{A}$  est totalement discontinue,  $S_T^V$  a la propriété d'Iversen.

Parmi les propositions que nous avons démontrées concernant les rapports entre les différentes classes de recouvrements  $P$  exhaustibles et la classe  $I$ , rappelons la suivante: La condition

nécessaire et suffisante pour qu'un recouvrement normalement exhaustible ait la propriété d'Iversen, est que l'ensemble lacunaire soit totalement discontinu.

Indiquons aussi un critérium suffisant d'exhaustibilité  $\mathcal{E}$ -quasi normale: à savoir,  $\mathcal{E}$ -ensemble totalement discontinu. Un critérium nécessaire et suffisant pour qu'un recouvrement partiellement régulièrement exhaustible, soit  $\mathcal{E}$ -quasi normalement exhaustible, est donné par la condition: Chaque composante connexe de  $T^{-1}(\mathcal{E})$  doit être compacte.

De même, en utilisant l'exhaustion  $P$  nous avons donné des critères d'appartenance à la classe des recouvrements régulièrement exhaustibles de L. V. Ahlfors, à la classe  $\mathcal{O}_G$  de P. J. Myrberg et R. Nevanlinna ou à la classe  $\mathcal{C}_\gamma$  de L. Sario.

4. *Ramification des recouvrements riemanniens.* — En utilisant les procédés de la théorie de S. Stoïlow, nous avons approfondi d'un point de vue unitaire la ramification des recouvrements riemanniens. A ce but la formule de Hurwitz-Stoïlow ne suffisait pas et nous l'avons généralisée (1960): Soit  $S_T^V$  un recouvrement  $P$ . Choisissons un sous-ensemble  $\gamma'$  de courbes de Jordan deux à deux disjointes sur  $\gamma$ , qui contient toutes les courbes de Jordan de  $\gamma - (E \cup \mathcal{N})$ . Soit  $E_{\gamma'}$ , l'ensemble des points  $p \in \gamma'$  qui ne satisfont pas à la condition  $(L\beta_2)$  relativement à  $\gamma'$  et désignons par  $\gamma''_a$  les arcs simples formés sur  $(\gamma' - E_{\gamma'}) \cup [(\gamma - \gamma') - (E \cup \mathcal{N})]$ , par  $D_j$  les domaines composantes connexes de  $S - \gamma$  et par  $p_b$  les points de l'ensemble  $E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathcal{N}) - \gamma']$ . Alors  $r$ -l'ordre total de ramification du recouvrement  $S_T^V$ , est donné par la formule

$$r = \rho - \sum n_j \rho_j - \sum x_a + \sum y_b, \quad (3)$$

où  $\rho_j$  est la caractéristique de  $D_j$ , tandis que  $n_j$ ,  $x_a$  et  $y_b$  le nombre des feuillets de  $S_T^V$  sur  $D_j$ ,  $\gamma''_a$  et  $p_b$  respectivement. Si  $V = S$  et  $T$  l'application identique, cette formule (3) décrit la configuration  $(S, \gamma)$ :

$$0 = \rho - \sum \rho_j - N(\gamma''_a) + N(p_b),$$

$N(\gamma''_a)$  et  $N(p_b)$  désignant le nombre des  $\gamma''_a$  resp.  $p_b$ , et généralise la formule d'addition des caractéristiques. Parmi les

nombreuses applications de (3), nous nous bornerons à remarquer qu'elle peut être utilisée dans la théorie des fonctions pseudo-harmoniques de M. Morse.

A l'aide de (3) nous avons obtenu une forme tout à fait générale du *théorème des disques*: Etant donné un recouvrement riemannien  $S_T^V$  on appelle *disque* ou *domaine complètement ramifié* un domaine de Jordan  $\delta \subset S$ , qui n'est couvert par aucun feuillet simple de  $S_T^V$ . En 1935, L. V. Ahlfors démontre que les recouvrements riemanniens simplement connexes, régulièrement exhaustibles ont au plus quatre disques complètement ramifiés et le premier résultat obtenu dans ce problème par les méthodes purement topologiques est dû à S. Stoilow; il concerne les recouvrements riemanniens simplement connexes, normalement exhaustibles et donne dans ce cas la borne supérieure 4 pour le nombre des disques.

Soit  $S_T^V$  un recouvrement riemannien  $P$  et considérons trois types de disques complètement ramifiés: 1)  $\delta'_s$  ( $s = 1, \dots, h'$ ), chaque  $\delta'_s$  étant inclus dans un  $D_j$ , 2)  $\delta''_t$  ( $t = 1, \dots, h''$ ), chaque  $\delta''_t$  contenant au moins une composante connexe de  $\gamma$  et ayant sa frontière dans  $S - \gamma$ , 3)  $\delta'''_u$  ( $u = 1, \dots, h'''$ ), la frontière de chaque  $\delta'''_u$  intersectant l'ensemble  $\gamma$  dans un nombre fini de points. A l'aide de (3) nous démontrons une inégalité, qui renferme toutes les formes du théorème des disques déduites topologiquement et aussi, beaucoup de résultats nouveaux. Nous allons donner un seul exemple: celui du *recouvrement quasi-totalement exhaustible*, que nous avons introduit comme un analogue topologique du recouvrement régulièrement exhaustible.

Soit  $V_k$  les domaines d'une exhaustion  $P$  de  $S_T^V$ . Ajoutons l'indice  $k$  à toutes les grandeurs qui se rattache à l'étape  $k$  de l'exhaustion. La frontière  $\Gamma_k$  de  $V_k$  se projette sur  $\gamma_k$ , qui décompose  $S$  en domaines  $D_{jk}$ . Soit  $n_{jk}$  le nombre des feuillets de  $\overset{\circ}{V}_k$  au-dessus  $D_{jk}$  et  $n_k$  celui des feuillets complets de  $\overset{\circ}{V}_k$  sur  $T(\overset{\circ}{V}_k)$ . Nous dirons que  $S_T^V$  est quasi-totalement exhaustible si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{n_k} = 1$ , uniformément par rapport aux indices  $j$ , tels que  $D_{jk} \subset T(\overset{\circ}{V}_k)$ . En ajoutant une inégalité sur les éléments de la configuration  $T(\overset{\circ}{V}_k)$  et en désignant par  $\tilde{\rho}_0$  la caractéristique

$T(V)$  nous obtenons pour le nombre  $h = h' + h'' + h'''$  des disques complètement ramifiés l'inégalité

$$h \leq 2 \left( -\tilde{\rho}_0 + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{n_k} \right). \quad (4)$$

Si  $V$  a une caractéristique finie et  $S_T^V$  une infinité de feuillettes:  $h \leq -2\tilde{\rho}_0 \leq 4$  et en particulier si  $V$  est simplement connexe  $h \leq 3$ . Les bornes supérieures sont exactes. Ces résultats contiennent ceux que nous avons obtenus auparavant au cas des recouvrements normalement (1952),  $\mathcal{E}$ -quasi-normalement exhaustibles ( $\mathcal{E}$ -ensemble totalement discontinu) (1958) et partiellement régulièrement exhaustibles (1962).

Nous avons présenté ce cas pour faire une comparaison entre les méthodes topologiques de la théorie de S. Stoilow et ceux métrico-topologiques d'Ahlfors, généralisés par différents auteurs parmi lesquels nous citons G. A. Hallström, K. Noshiro, S. Chern et tout récemment L. Sario. Au cas simplement connexe nos résultats donnent  $h \leq 3$ , tandis que ceux de L. V. Ahlfors  $h \leq 4$ ; autrement les résultats sont analogues (ce qui s'explique par le fait que dans la théorie métrico-topologique intervient  $\rho_k^+ = \max(\rho_k, 0)$  au lieu de  $\rho_k$ ). Pourtant il faut souligner que ces résultats ont des domaines différents d'application, car nous avons construit des exemples de recouvrements quasi-totalement, mais pas régulièrement exhaustibles et la réciproque est évidente.

Notre concis exposé embrasse seulement quelques aspects de l'œuvre de S. Stoilow, si vaste et si importante par ses conséquences.

(Reçu le 28 octobre 1964)

Institut de Matematica Acad. RPR  
St. M. Eminescu, 47  
Bucarest 3

**vide-leer-empty**