Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE CLASSE DE PROPRIÉTÉS COMMUNES A QUELQUES TYPES DIFFÉRENTS D'ALGÈBRES

Autor: Nijenhuis, Albert

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42353

SUR UNE CLASSE DE PROPRIÉTÉS COMMUNES A QUELQUES TYPES DIFFÉRENTS D'ALGÈBRES

par Albert NIJENHUIS *

Traduit par R. Bantegnie

INTRODUCTION

Le développement de l'algèbre moderne dans les quarante dernières années a conduit à de nombreuses notions nouvelles comme celles de groupe, d'anneau et de corps. Algèbre linéaire est devenu un mot domestique. L'algèbre multilinéaire qui trouve ses racines dans la théorie matricielle et dans l'analyse tensorielle a pris dans les années récentes des formes nouvelles plus simples et est devenue un outil commun de l'algèbre moderne.

Parmi les concepts les plus utilisés est celui d'*algèbre*; il combine une structure d'espace vectoriel et une structure multiplicative. Bien connues sont les algèbres associatives (qu'elles soient commutatives ou non); elles sont des généralisations directes du système numérique et comprennent les matrices. Les Algèbres de Lie sont plus récentes; leur origine est la théorie des groupes continus mais elles ont trouvé de nombreuses applications dans d'autres domaines. Les algèbres de Vinberg sont moins connues et sont discutées ici pour montrer que le thème de cet article ne se restreint pas de lui-même au cas d'algèbres qui sont déjà bien connues.

Les algèbres que nous considérons sont toutes caractérisées par le fait que les constantes de structure sont restreintes par des conditions linéaires (p. ex. la symétrie gauche) et par des conditions quadratiques (p. ex. l'associativité ou l'identité de Jacobi). Cependant, les restrictions doivent être d'une sorte particulière: elles doivent pouvoir s'exprimer sous une forme particulière à l'aide d'un *système de composition* convenable. Cette notion de système de composition est seulement développée lentement le long de l'article et sa définition n'intervient pas avant la section finale.

Comme le but de cet article est purement d'exposition, l'auteur a essayé de compter sur assez peu de matériel déjà connu. Le plus important est

---

*) Cet article a paru en anglais dans Nieuwe Archief voor Wiskunde, XVII, 17-46, 87-108, 1969.

l'algèbre linéaire; les notions de groupe, d'idéal, d'espace quotient et les notions analogues sont utilisées (assez clairement).

L'article est partagé en trois parties et est organisé de telle façon que chacune des parties a sa propre récompense. La première, la plus élémentaire, discute de façon assez informelle certaines propriétés des algèbres associatives, des algèbres de Lie et des algèbres de Vinberg. La discussion des deux premières sert à motiver les concepts concernant les dernières. Les modules sur ces algèbres sont aussi introduits.

La partie II utilise exclusivement les algèbres associatives. On montre comment la considération des applications multilinéaires de l'espace vectoriel sous-jacent dans lui-même et l'introduction d'une opération pour ces applications, le produit de composition, fournit déjà la clé d'une foule de notions, depuis les commutateurs jusqu'aux extensions à la cohomologie et finalement aux déformations. Un exemple simple de déformation est donné explicitement.

La partie III commence par introduire les produits de composition associés aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Ensuite, l'histoire de la partie II s'applique aussi bien presque mot par mot à ces deux types. Comme illustration, on démonte une algèbre de Lie. Ensuite, d'autres opérations sont construites, fondées uniquement sur le produit de composition et donc valables pour les trois types d'algèbres. Les domaines d'application englobent les déformations d'homomorphismes et de sous-algèbres. La dernière section donne sous une forme quelque peu plus explicite et formelle quelques propriétés du produit de composition qui jusqu'ici ont été utilisées de façon assez informelle. S'ensuit la définition d'un système de composition.

Vu cette manière de faire, on peut lire l'article seulement pour voir quelques propriétés générales des algèbres associatives ou des algèbres de Lie, ou on peut vouloir voir comment une algèbre « drôle » peut encore être tout à fait raisonnable. La lecture de la partie I suffira alors. (Le fait que les algèbres de Jordan, du à la nature cubique des conditions portant sur les constantes de structure, ne soient pas comprises est regrettable, mais des développements futurs peuvent remédier à cette situation.) Pareillement, si l'on est curieux au sujet des déformations des algèbres associatives, ou si l'on veut voir une approche simple de la cohomologie, la partie II suffira. Finalement, la partie III étend la cohomologie et les déformations d'algèbres associatives aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Elle donne aussi des renseignements sur d'autres problèmes de déformation concernant ces trois types d'algèbres. Finalement, elle érige des critères pour que valent les mêmes résultats pour d'autres types — peut-être encore inconnus — d'algèbres.

La matière de cet article a été puisée à différentes sources. L'inclusion dans le texte de notes bibliographiques n'a pas semblé pratique: à la place, chaque partie se termine par quelques-unes de ces notes dans une section séparée. En allant aux sources indiquées, le lecteur trouvera des discussions plus complètes des sujets traités et aussi d'autres sujets qui bien que liés n'ont pu être mentionnés par manque de place.

Je considère comme un honneur de dédier cet article à J.A. Schouten, à l'occasion de son 85[e] anniversaire, et en reconnaissance de sa contribution à la théorie des invariants tensoriels. Il y a quelque dix ans son approche a contribué de façon substantielle à éclaircir le terrain de la théorie de la déformation.

PARTIE I : *Quelques types d'algèbres*

1. *Algèbres associatives et algèbres de Lie.*

La propriété caractéristique d'une algèbre est que l'ensemble sous-jacent de ses éléments V a la structure d'un espace vectoriel (nous nous bornerons de façon constante au cas de la dimension finie et au cas réel). La structure additive de V fournit l'addition de l'algèbre. La multiplication s'exprime en donnant une application $\mu : V \times V \to V$. En accord avec la structure d'espace vectoriel de V nous supposerons toujours que μ est bilinéaire (c.-à-d. que $\mu(x, y)$ est linéaire séparément en x et en y). Les propriétés de V et de μ assurent alors que l'addition est commutative et associative, et que l'addition et la multiplication vérifient les lois distributives.

L'application produit μ est entièrement déterminée par un ensemble de constantes de structure (c^k_{ij}): soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V, alors pour chaque i et j entre 1 et n, $\mu(e_i, e_j)$ est un élément de V et ses composantes $c^1_{ij}, \ldots, c^n_{ij}$ sont les constantes de structure:

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_k c^k_{ij} e_k .$$

Tout ce qui est dit à l'aide de μ peut être reformulé à l'aide des constantes de structure.

Jusqu'ici rien n'a été dit sur l'associativité de la multiplication, ou sur quelque autre propriété du produit.

En fait, la définition générale d'une algèbre n'englobe aucune condition de ce type. Naturellement, cependant, les algèbres sont appelées commutatives si $xy = yx$, associatives si $x(yz) = (xy)z$. D'autres possibilités sont mentionnées plus tard. Alors que les algèbres commutatives et associatives ont été les plus importantes et que de nombreux développements modernes