

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENÈNE PRESQUE COMPLEXE
Autor: Maumary, S.
Kapitel: 1. Donnée du problème
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42358>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENE PRESQUE COMPLEXE

par S. MAUMARY *

1. DONNÉE DU PROBLÈME

Soit G un groupe de Lie compact réel, U un sous-groupe fermé, et G/U l'espace des classes à droite gU , $g \in G$. Ce dernier est une variété différentiable réelle compacte, dont on désignera l'espace tangent au point $0 = U \in G/U$ par $(G/U)_0$. Considérons la représentation isotrope $\iota(u) = du(0) \in \text{Aut}_{\mathbf{R}}(G/U)_0$, $u \in U$ étant interprété comme translation à gauche de G/U . Cette représentation détermine le fibré tangent ξ à G/U : l'application $G \times (G/U)_0 \rightarrow E(\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto dg(v)$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U , devient un homéomorphisme si l'on identifie (gu, v) avec $(g, \iota(u)v)$.

Supposons que ξ soit muni d'une structure complexe J , invariante par G . Autrement dit, J est un \mathbf{R} -automorphisme de ξ , tel que $J^2 = -\text{identité}$ et $J \circ dg = dg \circ J$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U . Cette dernière égalité montre que J est déterminée par sa restriction à la fibre $(G/U)_0$ et que celle-ci est invariante par $\iota(u)$, $u \in U$. On écrira ξ^J le fibré ξ muni de la structure complexe J . La représentation réelle ι se factorise alors canoniquement par une représentation complexe $\iota^J : U \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{C}}(G/U)_0^J$, qui détermine ξ^J comme précédemment.

Prenons un tore $T \subset U$, et soit $q : G/T \rightarrow G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. La restriction $\iota|_T$ détermine $q^*\xi$: l'application $G \times (G/U)_0 \rightarrow E(q^*\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto (gT, dg(v))$, devient un homéomorphisme si l'on identifie (gt, v) avec $(g, \iota(t)v)$, $\forall t \in T$. Maintenant, $\iota^J|_T$ est somme directe de représentations complexes ϕ_{α}^J de rang 1, donc $q^*\xi^J$ est somme directe de fibrés vectoriels complexes ξ_{α}^J de rang 1, déterminé par ϕ_{α}^J . La classe totale de Chern $c(\xi^J) \in H^*(G/U; \mathbf{Z})$ vérifie donc

$$q^*(c(\xi^J)) = c(q^*\xi^J) = \prod_{\alpha} c(\xi_{\alpha}^J) = \prod_{\alpha} (1 + \chi(\xi_{\alpha}^J)) \in H^*(G/T; \mathbf{R}).$$

*) Conférence donnée à la réunion des mathématiciens suisses aux Plans-sur-Bex mars 1968.

Comment la classe d'Euler $\chi(\xi_\alpha^J)$ est-elle déterminée par ϕ_α^J ? Si T est un tore maximal dans G , on pourra donner une réponse complète.

En ce qui concerne les classes caractéristiques, on suppose seulement que l'on connaît, pour tout fibré vectoriel réel orienté, sa classe d'Euler, sa suite exacte de Gysin et l'existence d'une application classifiante.

Exemple :

Si $G = U_{n+1}$ (groupe unitaire à $n+1$ variables), et

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array} \right),$$

l'application $G/U \rightarrow PC^n$ induite par $g \mapsto g(1, 0, \dots, 0)$, $g \in G$, est un difféomorphisme. Mais la variété PC^n admet une structure complexe invariante par G , donnée au voisinage de $(1:0:\dots:0)$ par la carte $(1:z_2:\dots:z_{n+1}) \mapsto (z_2, \dots, z_{n+1})$. Soit J la structure complexe invariante induite sur le fibré tangent réel ξ à PC^n . Alors ξ^J est le fibré tangent complexe.

Soit

$$T = \left(\begin{array}{ccc} U_1 & & 0 \\ & U_1 \cdots & \\ 0 & & U_1 \end{array} \right) = U_1 \times \dots \times U_1$$

le tore dans U , qui est d'ailleurs maximal dans G . Par définition, $\iota^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})$, $x_\alpha \in \mathbf{R}$, est la différentielle complexe de la translation

$$(1:z_2:\dots:z_{n+1}) \mapsto (\exp ix_1:z_2 \exp ix_2:\dots:z_{n+1} \exp ix_{n+1}) = \\ (1:z_2 \exp i(x_2-x_1):\dots:z_{n+1} \exp i(x_{n+1}-x_1))$$

au point $(1:0:\dots:0)$. Dans la carte ci-dessus, on a donc

$$\iota^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha \exp i(x_\alpha - x_1), \quad \alpha > 1.$$

Donc

$$\phi_\alpha^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha \exp i(x_\alpha - x_1).$$

2. EXTENSION DES FIBRÉS PRINCIPAUX

Etant donné un groupe de Lie compact réel G , un G -fibré principal P est défini par un espace $E(P)$ muni d'une action libre et continue de G , à droite, et par une projection $\pi : E(P) \rightarrow B(P)$ sur un espace de base compact $B(P)$, telle que $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \in yG$. Un morphisme de G -fibrés prin-