Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

Autor: Maumary, S.

Kapitel: 2. Extension des fibres principaux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42358

Comment la classe d'Euler $\chi(\xi_\alpha^J)$ est-elle déterminée par ϕ_α^J ? Si T est un tore maximal dans G, on pourra donner une réponse complète.

En ce qui concerne les classes caractéristiques, on suppose seulement que l'on connaît, pour tout fibré vectoriel réel orienté, sa classe d'Euler, sa suite exacte de Gysin et l'existence d'une application classifiante.

Exemple :

Si $G = U_{n+1}$ (groupe unitaire à $n+1$ variables), et

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array}\right),$$

l'application $G/U \to P\mathbf{C}^n$ induite par $g \mapsto g(1, 0, ..., 0), g \in G$, est un difféomorphisme. Mais la variété $P\mathbf{C}^n$ admet une structure complexe invariante par G, donnée au voisinage de $(1 : 0 : ... : 0)$ par la carte $(1 : z_2 : ... : z_{n+1}) \mapsto$ $\to (z_2, ..., z_{n+1})$. Soit J la structure complexe invariante induite sur le fibré tangent réel ξ à $P\mathbf{C}^n$. Alors ξ^J est le fibré tangent complexe.

Soit

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & U_1 & \\ & & \ddots \\ O & & U_1 \end{pmatrix} = U_1 \times ... \times U_1$$

le tore dans U, qui est d'ailleurs maximal dans G. Par définition, $\iota^J(\exp ix_1, ..., \exp ix_{n+1})$, $x_\alpha \in \mathbf{R}$, est la différentielle complexe de la translation

$$(1 : z_2 : ... : z_{n+1}) \mapsto (exp\ ix_1 : z_2\ exp\ ix_2 : ... : z_{n+1}\ exp\ ix_{n+1}) =$$
$$(1 : z_2\ exp\ i(x_2 - x_1) : ... : z_{n+1}\ exp\ i(x_{n+1} - x_1))$$

au point $(1 : 0 : ... : 0)$. Dans la carte ci-dessus, on a donc

$$\iota^J(exp\ ix_1, ..., exp\ ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha\ exp\ i(x_\alpha - x_1)\,, \quad \alpha > 1\,.$$

Donc

$$\phi_\alpha^J(exp\ ix_1, ..., exp\ ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha\ exp\ i(x_\alpha - x_1)\,.$$

2. Extension des fibrés principaux

Etant donné un groupe de Lie compact réel G, un G-fibré principal P est défini par un espace $E(P)$ muni d'une action *libre* et continue de G, à droite, et par une projection $\pi : E(P) \to B(P)$ sur un espace de base compact $B(P)$, telle que $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \in yG$. Un morphisme de G-fibrés principaux $P' \to P$ est une application $f : E(P') \to E(P)$ équivariante par G; elle induit une application $B(P') \to B(P)$. Pour toute application $q : B' \to$ $\to B(P)$, on appelle image réciproque q^*P de P le G-fibré principal d'espace $E(q^*P) = \{ (x, y) \in B' \times E(P) \mid q(x) = \pi(y) \}$ muni de l'action $(x, y) g = (x, yg)$ de $g \in G$, et de la projection $(x, y) \to x$ sur $B(q^*P) = B'$. Lorsque q est induit par un morphisme de G-fibrés principaux $P' \to P$, alors $q^*P \approx P'$.

Exemples :

1) Soit U un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G. En posant $E = G$ muni des translations à droite par U, $B = G/U$, et $\pi(g) =$ $= gU$, $g \in G$, on obtient un U-fibré principal que l'on notera G_U. Plus généralement, si P est un G-fibré principal, on obtient un U-fibré principal P_U en posant $E(P_U) = E(P)$, $B(P_U) = E(P)/U$, et $\pi(x) = xU$, $\chi \in E(P)$.

2) Soit $E = S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$, muni de l'action $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \lambda =$ $= (z_1 \lambda, \ldots, z_{n+1} \lambda)$ du groupe unitaire U_1, $B = P\mathbf{C}^n$, et $\pi : S^{2n+1} \to$ $\to P\mathbf{C}^n$ l'application canonique. On obtient ainsi un U_1-fibré principal γ, appelé fibré de Hopf.

Etant donné un G-fibré principal P et un G-espace F, c'est-à-dire un espace muni d'une action continue à gauche de G, on appelle fibré de fibre F associé à P l'espace $E(P) \times_G F$ quotient de $E(P) \times F$ par la relation $(x, y) =$ $= (xg, gy)$, $g \in G$, muni de la projection $E(P) \times_G F \to B(P)$ induite par $(x, y) \mapsto \pi(x)$. On notera $P[F]$ ce fibré et $x \times_G y$ la classe de (x, y) dans $E(P) \times_G F$.

Exemple :

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace compact B. Introduisons sur ξ un produit scalaire paramétré continûment par les fibres, et soit E l'ensemble des bases orthonormées $(e_i(b))$ des fibres de ξ, muni de l'action du groupe unitaire U_n donnée par $(e_i(b)) A = \sum_i a_{ji} e_i(b)$, $A = (a_{ij}) \in U_n$, (A devient ainsi la matrice de passage d'une base à l'autre).

Soit $\pi : E \to B$ la projection $(e_i(b)) \to b$. Afin d'obtenir une topologie convenable sur E, considérons un ouvert trivialisant $U \subset B$, c'est-à-dire que $\xi \mid U \approx U \times \mathbf{C}^n$. Pour $b \in U$, l'application $(e_i(b)) \mapsto (b, A)$, $A =$ $=$ matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{C}^n$ à $(e_i(b))$, est une bijection $\phi_U : \pi^{-1}(U) \approx U \times U_n$ équivariante par U_n, ce dernier agissant par translations à droite sur $U \times U_n$. Donc, si V est un autre ouvert trivialisant pour ξ, alors $\phi_V \phi_U^{-1}(b, A) = (b, A(b) A)$ où $A(b) \in U_n$ dépend continûment de $b \in U \cap V$. Il en résulte une topologie sur E pour laquelle les ϕ_U sont des homéomorphismes, et l'action de G est continue. Cet espace muni de π détermine donc un U_n-fibré principal P. Pour le U_n-espace canonique $\mathbf{C}^n$, $E \underset{U_n}{\times} \mathbf{C}^n$ est homéomorphe à $E(\xi)$ par $(e_i(b)) \underset{U_n}{\times} (y_i) \mapsto \sum_i y_i e_i(b)$, d'où un isomorphisme $\xi \approx P[\mathbf{C}^n]$.

En particulier, le fibré vectoriel canonique η sur $P\mathbf{C}^n$, dont l'espace est par définition $\{(x, y) \in P\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid y \in x\}$, est associé de la manière précédente au fibré de Hopf γ.

Considérons maintenant un G-fibré principal P et un homomorphisme $\phi : G \to G'$. Ce dernier détermine canoniquement une action à gauche de G sur G', d'où le fibré associé $P[G']$. Mais on peut munir $E(P) \underset{G}{\times} G'$ des translations à droite par G'. Alors $P[G']$ devient un G'-fibré principal ${}_\phi P$, appelé ϕ-extension de P. Un G'-espace F devient par ϕ un G-espace et alors ${}_\phi P[F]$ est canoniquement isomorphe à $P[F]$.

Un isomorphisme de G'-fibrés principaux $h : {}_\phi P \approx P'$ correspond biunivoquement à une application $f : E(P) \to E(P')$, telle que $f(xg) = f(x)\,\phi(g)$, la correspondance étant donnée par $f(x) = h(x \underset{G}{\times} 1)$.

Exemple :

Soit P un G-fibré principal, U un sous-groupe fermé, et i l'inclusion de U dans G. Si $q : E(P)/U \to B(P)$ est l'application $xU \mapsto \pi(x)$, alors q^*P est canoniquement isomorphe à la i-extension du U-fibré principal P_U. En effet, cet isomorphisme correspond à l'application $E(P_U) \to E(q^*P)$ donnée par $x \mapsto (xU, x)$.

Lemme : Soit G un groupe de Lie réel compact, U un sous-groupe fermé de G, et ι la représentation isotrope de U dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$. Alors le fibré tangent ξ à G/U est $G_U[\mathbf{R}^n]$, $\mathbf{R}^n$ étant le U-espace déterminé par ι.

Preuve : Choisissons dans ξ un produit scalaire invariant par les translations à gauche de G/U par G. Cela revient à choisir un produit scalaire dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$ invariant par ι. On a vu que ξ est associé au 0_n-fibré principal P', (0_n = groupe orthogonal à n variables), dont l'espace $E(P')$ est celui des bases orthonormées des fibres de ξ. Choisissons une base orthonormée fixée (e_i) dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$, et considérons l'application $f : E(G_U) \to$ $\to E(P')$ donnée par $g \mapsto dg(e_i)$, en interprétant g comme translation à gauche de G/U. On a évidemment $f(gu) = f(g)\,\iota(u)$ pour $u \in U$, donc f détermine un isomorphisme $\iota(G_U) \approx P'$. Il en résulte l'isomorphisme annoncé $G_U\,[\mathbf{R}^n] \approx \xi$.

Corollaire : Dans les conditions du lemme, soient T un sous-groupe de U, et $q : G/T \to G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. Alors $q^*\xi$ est le fibré $G_T\,[\mathbf{R}^n]$, $\mathbf{R}^n$ étant le T-espace déterminé par $\iota \mid T$.

Preuve : On a déjà vu que q^*G_U est la i-extension de G_T. Or $q^*\xi$ est associé au 0_n-fibré principal q^*P', donc$q^*\,P' \approx q^*\,({}_{\iota}G_U) = \iota(q^*G_U) = {}_{\iota}(G_T)$. Il en résulte que $q^*\xi \approx G_T\,[\mathbf{R}^n]$, pour l'action $\iota \mid T$ de T sur $\mathbf{R}^n$.

3. Interprétations des représentations complexes irréductibles d'un tore T

Tout homomorphisme différentiable $h : U_1 \to U_1$ est de la forme $h\,(\exp ix) = \exp iax$, $a \in \mathbf{Z}$. Cela résulte du fait que la différentielle d'une translation à gauche τ_g de U_1 est en tout point l'identité $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ce qui implique $dh\,(g) = dh\,(1), g \in U_1$, en vertu de $dh\,(g) \circ d\,\tau_g\,(1) = d(h \circ \tau_g)\,(1) = d(\tau_{(hg)} \circ h)\,(1)$. Alors h est nécessairement de la forme ci-dessus, avec $a \in \mathbf{R}$. Mais si $x \in \mathbf{Z}$, on doit avoir $ax \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire $a \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, si $T = U_1 \times \ldots \times U_1$ et si $k_j : U_1 \to T$ applique $\exp ix$ sur $(1, \ldots 1, \exp ix, 1, \ldots 1)$, tout homomorphisme $h : T \to U_1$ est de la forme $h\,(\exp ix_1, \ldots \exp ix_n) = \prod_j h \circ k_j\,(\exp ix_j) = \prod_j \exp i\,a_j x_j = \exp i\,(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)$, $a_j \in \mathbf{Z}$. D'où une bijection canonique $\alpha : \operatorname{Hom}(T, U_1) \approx \mathbf{Z}^n$, $\alpha\,(h) = (a_j)$. Par ailleurs, $\operatorname{Hom}(T, U_1)$ est un groupe abélien pour la multiplication des homomorphismes, et l'on voit aussitôt que α est un isomorphisme de groupes. En composant α avec l'inclusion $\mathbf{Z}^n \to \operatorname{Hom}_R\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ donnée par $(a_j) \to a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, on obtient l'homomorphisme injectif $h \mapsto dh\,(1, \ldots, 1)$ de $\operatorname{Hom}(T, U_1)$ dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$ de T. En particulier, si p_j est la projection de T sur son j^{ieme} facteur, $\alpha\,(P_j)$ est la fonction coordonnée x_j sur $\mathbf{R}^n$.

Considérons maintenant les groupes de cohomologie $H^1\,(T; \mathbf{Z})$ et $H^1\,(U_1; \mathbf{Z})$, où l'on suppose U_1 orienté de la manière habituelle. Alors $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, donc tout $h \in \operatorname{Hom}(T, U_1)$ détermine un élément $h^*(1) \in H^1\,(T; \mathbf{Z})$, h^* étant l'homomorphisme $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$ induit par h. On obtient ainsi un homomorphisme naturel $\nu_T : \operatorname{Hom}(T, U_1) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$.