

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENÈNE PRESQUE COMPLEXE  
**Autor:** Maumary, S.  
**Kapitel:** 4. Classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe associé a un G-fibré principal  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42358>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

4. CLASSES DE CHERN D'UN FIBRÉ VECTORIEL COMPLEXE  
ASSOCIÉ A UN G-FIBRÉ PRINCIPAL

( $G$  groupe de Lie réel compact)

Considérons un fibré vectoriel sur  $X$  de la forme  $\xi = P[\mathbf{C}^n]$ , où  $P$  est un  $G$ -fibré principal et  $\mathbf{C}^n$  le  $G$ -espace d'une représentation  $\phi : G \rightarrow U_n$ . Soit  $T$  un tore contenu dans  $G$ . On peut supposer à une conjugaison près,

que  $\phi(T) \subset T'$  où  $T'$  est le tore maximal  $\begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$  de  $U_n$ .

Si  $q : E(P)/T \rightarrow X$  est l'application canonique  $xT \mapsto \pi(x)$ , on sait que  $q^*\xi$  est associé au  $T$ -fibré principal  $P_T$ ,  $\mathbf{C}^n$  étant cette fois le  $T$ -espace déterminé par  $\phi|_T$ . Le  $j^{i\text{eme}}$  facteur  $\mathbf{C}_i$  de  $\mathbf{C}^n$  est le  $T$ -espace de la représentation  $\phi_i = p_i \circ \phi|_T \in \text{Hom}(T, U_1)$ ,  $p_i$  étant la projection de  $T'$  sur le  $i^{\text{eme}}$  facteur. Le  $T$ -espace  $\mathbf{C}^n$  étant somme directe des  $T$ -espaces  $\mathbf{C}_i$ , on a  $q^*\xi = \bigoplus_i P_T[\mathbf{C}_i]$ . En posant  $\xi_i = P_1[\mathbf{C}_i]$  on a  $c(\xi_i) = 1 + \chi(\xi_i)$  et  $\chi(\xi_i) = \mu_{P_T}(\phi_i) = \tau_{P_T}(\omega_i)$ ; avec  $\omega_i = \nu(\phi_i) \in H^1(T; \mathbf{Z})$ . Donc  $c(q^*\xi) = \prod_i c(\xi_i) = \prod_i (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$  c'est-à-dire:

$$q^*(c(\xi)) = \prod_i (1 + \tau_P \omega_i) \in H^*(E(P)/T; \mathbf{Z})$$

Remarques :

1) Si  $G = U_m$ ,  $T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$ ,  $(U_1 \dots U_1)$ , alors  $q^*$  est injectif en ver-

tu du *principe de clivage* (cf. appendice) appliqué au fibré vectoriel  $\zeta = P[\mathbf{C}^m]$ , où  $\mathbf{C}^m$  est le  $U_m$ -espace canonique. En effet,  $E(P)/T$  n'est autre que l'espace  $DU(\zeta)$  (cf. appendice, remarque 1), homotopiquement équivalent à l'espace  $D(\zeta)$  des drapeaux de  $\zeta$ .

2) Si  $G = U_n$ ,  $\phi =$  identité,

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$$

alors  $\xi_i$  n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à  $\xi$ . Dans ce cas  $\phi_i = p_i$  et  $\alpha(p_i)$  est la fonction coordonnée  $x_i$  sur l'algèbre de Lie  $\mathbf{R}^n$  de  $T$ .

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation  $q^*\xi = \bigoplus \xi_i$ , mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons  $q$  en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E(\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où  $r(xT) = (x \times 1)T'$  pour  $x \in E(P)$  et  $s(yT') = yU_n$  pour  $y \in E(\phi P)$ . Comme  $E(\phi P/T')$  est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux  $D(\xi)$ , on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod_{\phi T'} (1 + \tau_P \circ v(p_i))$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod_T (1 + \tau_P \circ \phi^* \circ v(p_i)),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod_T (1 + \tau_P \circ v(\phi_i)) = \prod_T (1 + \tau_P(\omega_i))$$

en posant  $\phi_i = p_i \circ \phi$  et  $\omega_i = v(\phi_i)$ .

## 5. CLASSE DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

En utilisant les notations du §1, soit  $G/U$  un espace homogène, dont le fibré tangent  $\xi$  est muni d'une structure complexe  $J$  invariante par  $G$ . On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe  $\iota^J$  restreinte à un tore  $T$  contenu dans  $U$ . On désignera par  $g$  et  $u$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $U$ .

On va d'abord voir que  $\iota^J$  est induite par  $Ad : G \rightarrow Aut_{\mathbf{R}} g$ , cette dernière étant définie par  $g \mapsto d\sigma_g(1)$ , où  $\sigma_g$  est l'automorphisme intérieur de  $G$  déterminé par  $g \in G$ . En effet, si  $\pi : G \rightarrow G/U$  est l'application canonique, on a  $d\pi(1) \circ Ad u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$  pour  $u \in U$ , puisque  $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$ , en interprétant  $u$  comme translation à gauche de  $G/U$ . Donc  $Ad u, u \in U$ , est un automorphisme de la suite exacte  $0 \rightarrow u \rightarrow g \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \rightarrow 0$ , induisant l'automorphisme  $\iota(u)$  de  $(G/U)_0$ . Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation  $\iota^J \otimes 1$  de  $U$  dans  $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$  est équivalente à  $\iota^{-J} \oplus \iota^J$ , où  $\iota^J$  est la représentation conjuguée de  $\iota^J$ . Cela résulte du fait que