**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 14 (1968)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

**Kapitel:** Appendice: le principe de clivage

**Autor:** Maumary, S.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-42358

*Preuve :* Il suffit de se rappeler que $\xi^J$ est associé au $U$-fibré principal $G_U$ par la représentation $\iota^J$ de $U$, et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

*Convention d'écriture :* On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_\alpha^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1-\alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

*Exemple :*

Reprenons $P\mathbf{C}^n$ (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_\alpha - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = \prod\limits_{\alpha>1} (1+x_1-x_\alpha)$. Considérons $\mathbf{C}^{n+1}$ comme fibré vectoriel $\zeta$ sur un point $a$. En composant $q : U_{n+1}/T \to P\mathbf{C}^n$ avec l'application constante $s : P\mathbf{C}^n \to a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \to a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod\limits_{i=1} (1-x_i)$. Donc $\prod (1-x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod (X-x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en $X$ à coefficients dans $A$. En substituant $1+x_1$ à $X$, on obtient $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = (1+x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec $\xi'$ de rang 1, puisque $\xi$ est associé à un $U_1 \times U_n$ – fibré principal par $\iota^J$, et $\xi'$ n'est autre que $r^*\zeta$, c'est-à-dire par construction $\gamma$. Donc $x_1 = q^*(t)$, où $t$ engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$. Comme $q^*$ est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(P\mathbf{C}^n) = (1+t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

## APPENDICE : le principe de clivage

Soit $\xi$ un fibré vectoriel complexe de rang $n$ sur un espace connexe $X$. Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de $\xi$, ainsi que la projection $q : P(\xi) \to X$ induite par $\pi : E(\xi) \to X$.

Alors :

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré $\lambda$ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$ ;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta$ sur $X \times P\mathbf{C}^k$, $k \geqq n$, où $\eta$ est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur $P\mathbf{C}^k$. Si $(\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f : (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \to P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par $xz$ dans $\xi$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi \times \pi'"'] & P(\xi) \arrow[d, "q"] \\ X \times PC^k \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$H^{i-2n}(X \times PC^k) \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times PC^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*}$$

$$\longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_o \to H^{i-2n+1}(X \times PC^k)$$

Comme $H^*(X \times PC^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et $p^*$ applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total $i$ dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1} t + \dots + a_0 t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si $x$ est un point de $X$, alors $\xi \hat{\otimes} \eta \mid x \times PC^k \approx C^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \dots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i : x \times PC^k \to X \times PC^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \hat{\oplus} \oplus \dots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à $\xi'$ la même opération qu'à $\xi$, et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de $\xi$, formé des suites ordonnées de $n$ droites linéairement indépendantes dans les fibres de $\xi$, et $q : D(\xi) \to X$ la projection induite par celle de $\xi$, alors:

1) $q^* \xi \approx \underset{i=1}{\oplus} \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

*Remarques :*

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de $n$ droites orthogonales dans les fibres de $\xi$, relativement à un

produit scalaire quelconque dans $\xi$, paramétré par les fibres. Si $P$ est le $U_n$-fibré principal formé par les bases orthonormées de $\xi$, alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par $Z_2$. En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer $P\mathbf{C}^k$ par $P\mathbf{R}^k$ et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients $Z_2$. (Rappelons que $H^i(P\mathbf{R}^k; \mathbf{Z}) \approx Z_2$ pour $i$ impair $<$ k).

## RÉFÉRENCES


[1] Chevalley, C. *Theory of Lie groups.*

[2] Serre, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.*

[3] Husemoller, D. *Fibre bundles.*

[4] Borel, A. and F. Hirzebruch. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math. 1958, 59, 60.*

[5] Steenrod, N. *The topology of fibre bundles.*


*(Reçu le 18 mars 1969)*

Serge Maumary
Institute for Advanced Studies
Princeton, New-Jersey
U. S. A.