

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES  $m$  iemes DANS LES ANNEAUX  $\beta$ -  
ADRIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTRIERS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42351>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SOMMES DE PUISSANCES  $m^{\text{ièmes}}$   
DANS LES ANNEAUX  $\mathfrak{P}$ -ADIQUES  
ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Jean-René JOLY

1. INTRODUCTION

Pour tout anneau commutatif et unitaire  $A$  et tout entier positif  $m$ , nous désignerons par  $A_m^+$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_s^m$$

( $s$  positif quelconque,  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ), et par  $A_m$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$\pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m$$

(avec également  $s$  positif quelconque et  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ); il est clair que  $A_m$  est le sous-anneau de  $A$  engendré par les puissances  $m^{\text{ièmes}}$  des éléments de  $A$ . Nous désignerons d'autre part par  $w(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m^+$  puisse se mettre sous la forme (1), et par  $v(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m$  puisse se mettre sous la forme (2) (bien entendu, il n'est pas exclu a priori que  $w(m; A)$  ou  $v(m; A)$  soit infini; voir par exemple dans [8], th. (7.30), la construction d'un corps  $L$  tel que  $w(m; L)$  soit infini pour tout exposant pair  $m$ ).

\*

L'étude par des méthodes purement *algébriques* des constantes  $w(m; A)$  et  $v(m; A)$ , et la recherche de conditions permettant d'affirmer que  $A = A_m$ , ont été entreprises notamment par Birch, Ramanujam et nous-même (voir respectivement [3], [9], [7]) dans le cas où  $A$  est un *anneau  $\mathfrak{P}$ -adique*, et par Siegel, Bateman, Stemmler, Bhaskaran et nous-même dans le cas où  $A$  est un *anneau d'entiers algébriques* (voir respectivement [10], [1], [11], [2], [6]). Naturellement, l'étude de  $w(m; A)$  lorsque  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (ou un corps de nombres algébriques) est étroitement apparentée au problème de Waring, qui a fait depuis une cinquantaine

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstenons de les envisager ici.

\*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à  $w(m; A)$ ,  $v(m; A)$  et  $A_m$  dans le cas où  $A$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (paragraphe 2) et dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de  $v(m; A)$  une majoration explicite et indépendante de  $A$ , toujours dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. SOMMES DE PUISSANCES $m^{\text{ièmes}}$ DANS UN ANNEAU $\mathfrak{B}$ -ADIQUE

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si  $p$  est un nombre premier, si  $q = p^f$  ( $f \geq 1$ ) est un nombre  $p$ -primaire et si  $m$  est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole  $[q; m]$  le plus petit nombre  $p$ -primaire  $p^g$  ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant  $g$  divise l'exposant  $f$ ;  
le quotient  $(p^f - 1)/(p^g - 1)$  divise l'entier  $m$ .

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit  $k = \mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q = p^f$  éléments. Si  $m$  est un entier positif,  $k_m$  est égal au sous-corps de  $k$  contenant exactement  $[q; m]$  éléments:

$$k_m = \mathbb{F}_{[q; m]}.$$

\*

Ces préliminaires étant posés, désignons par  $A$  un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-