Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES DE PUISSANCES m iemes DANS LES ANNEAUX ß-ADIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: 2. Sommes de puissances m iemes dans un anneau ß-adique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42351

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstiendrons de les envisager ici.

*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à $w(m; A)$, $v(m; A)$ et A_m dans le cas où A est un anneau $\mathfrak{P}$-adique (paragraphe 2) et dans le cas où A est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de $v(m; A)$ une majoration explicite et indépendante de A, toujours dans le cas où A est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

2. Sommes de puissances m^{iemes} dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si p est un nombre premier, si $q = p^f$ ($f \geqq 1$) est un nombre p-primaire et si m est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole $[q; m]$ le plus petit nombre p-primaire p^g ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant g divise l'exposant f;
le quotient $(p^f - 1)/(p^g - 1)$ divise l'entier m.

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

Lemme (2.1). Soit $k = \mathbf{F}_q$ le corps fini à $q = p^f$ éléments. Si m est un entier positif, k_m est égal au sous-corps de k contenant exactement $[q; m]$ éléments:

$$k_m = \mathbf{F}_{[q;\, m]} .$$

*

Ces préliminaires étant posés, désignons par A un anneau $\mathfrak{P}$-adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques à corps résiduel fini), et soient k le corps résiduel de A, $q = p^f$ le nombre d'éléments de k et e l'indice de ramification absolu de A.

Théorème (2.2) (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a) $A = A_m$;
(b) $k = k_m$, et *de plus*, si p divise m, A est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité $A = A_m$ équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

(c) $[q; m] = q$, et *de plus*, si p divise m, $e = 1$.

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique, -1 est toujours somme de puissances m^{iemes} (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité $A = A_m$ implique donc en fait que tout élément de A est somme de puissances m^{iemes}; par ailleurs, même lorsque $A \neq A_m$, A_m est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et A est un A_m-module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

*

Théorème (2.3) (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ($\mathfrak{P}$-adique) A:

$$w\,(m; A) \leqq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de A) $w\,(m; A) \leqq m^{16m2}$; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si m est *premier impair*, on a la majoration plus précise $w\,(m; A) \leqq 2m-1$ (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

3. Sommes de puissances m^{iemes} dans un anneau d'entiers algébriques

Soient maintenant A un anneau d'entiers algébriques, K le corps des fractions de A, et d le discriminant de K; pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, convenons de désigner par c_p la caractéristique de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$, par e_p et f_p l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de A_p, et par $N\mathfrak{p}$ le nombre d'éléments de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$; on a donc $N\mathfrak{p} = c_p{}^f p$.