Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Kapitel: II. Sur un théorème de Hardy et Ramanujan

Autor: Saffari, Bahman

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42352

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 09.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

entières > 0 en dessous de l'hyperbole d'équation $uv = x$, et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas $g(n) = h(n) = 1$. Alors $f(n) = d(n) =$ nombre des diviseurs de n. Il est alors bien connu [2]) que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec $\xi = \sqrt{x}$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1) x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

γ désignant la constante d'Euler.

Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est $O(x^c)$, pour une constante convenable $c < \frac{1}{3}$ (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

II. Sur un théoreme de Hardy et Ramanujan

1. Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n. Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où B est une constante $\left[B = \gamma + \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right.$, la sommation étant étendue à tous les p premiers [3])$\left.\right]$. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendantes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

---

2) Voir par exemple [12] ou [13].

3) Dans tout cet article, les lettres $p, p', p'', \ldots$ désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre q désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».

THÉORÈME 1. *Pour deux entiers donnés $k, l \, (k \geqq 1)$, premiers entre eux, soit $\omega_{k,l}(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts p de n tels que $p \equiv l$* (mod k). *Alors, lorsque $x \to +\infty$, on a pour tout entier $m \geqq 1$:*

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l} x + \sum_{r=1}^{m} \frac{C_r}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right],$$

$B_{k,l}$ étant une constante dépendant de k et l, $\varphi(k)$ étant la fonction d'Euler, et les constantes C_r étant définies de la façon suivante (en notant par $\{t\}$ la partie fractionnaire [4]) *de t) :*

$$C_r = -\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^{r-1} \, dt = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \frac{d^r}{ds^r} \left(\frac{(s-1)\zeta(s)}{s} \right)_{s=1}$$

[*et en particulier $C_1 = \gamma - 1$*].

Le théorème 1 est une conséquence du résultat plus précis suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $\pi_{k,l}(x)$ le nombre de nombres premiers $p \leqq x$ tels que $p \equiv l$* (mod k), *et soient C, α, β, trois constantes (avec $C>0$, $\alpha>0$) telles que, lorsque $x \to +\infty$, on ait :*

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left[x \exp\left(-C(\log x)^\alpha (\log\log x)^\beta\right)\right]$$ [5]).

Alors il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l} x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} \, dt + $$
$$+ O\left[x \exp\left(-C'(\log x)^\alpha (\log\log x)^\beta\right)\right].$$

En admettant l'hypothèse de Riemann généralisée concernant les séries L relatives aux caractères modulo k [hypothèse que nous désignerons désormais par (H_k)], on peut considérablement améliorer le terme-erreur du théorème 2, grâce au:

4) Dans toute la suite, $[t]$ désignera la partie entière du nombre réel t, et $\{t\} = t - [t]$ sa partie fractionnaire.

5) Dans le cas général, on sait que cette relation est vraie avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (cf. [14], p. 46). Dans le cas $k = l = 1$ de tous les nombres premiers, on sait qu'on peut prendre $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$ (cf. [15]).

THÉORÈME 3. *Moyennant l'hypothèse* (H_k), *on a lorsque* $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{x^{\frac{1}{3}}(\log x)^{-\frac{4}{3}}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)} dt + $$

$$+ O\left[x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{1}{3}}\right]$$

2. *Démonstration des théorèmes 1 à 3.*

a) *Calcul préparatoire.* Soient x et ξ tels que $1 < \xi < x$. Alors:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)} dt - \tag{4}$$

$$- x \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt + \left\{\frac{x}{\xi}\right\} \eta_{k,l}(\xi) + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) - \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\},$$

où on a posé

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{\text{li}(x)}{\varphi(k)} + \eta_{k,l}(x) \quad {}^{6)}$$

En effet, nous avons tout d'abord, par application de la méthode de l'hyperbole:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) - \left[\frac{x}{\xi}\right] \pi_{k,l}(\xi) \tag{5}$$

Soit a tel que $1 < a < \inf(\xi, 2)$. Alors:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \frac{1}{p} = \int_a^\xi \frac{d\pi_{k,l}(t)}{t} = \frac{\pi_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{\pi_{k,l}(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{\text{li}(\xi)}{\xi} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{\text{li}(t)\, dt}{\varphi(k)\, t^2} + \int_a^\xi \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt .$$

---

6) Pour $x > 1$, $\text{li}(x) = v.p. \int_0^x \frac{dt}{\log t}$. Alors $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(1)$, lorsque $x \to +\infty$.

Mais

$$\int_a^\xi \frac{\mathrm{li}(t)\,dt}{t^2} = \frac{\mathrm{li}(a)}{a} - \frac{\mathrm{li}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{dt}{t\log t} = \frac{\mathrm{li}(a)}{a} - \frac{\mathrm{li}(\xi)}{\xi} +$$

$$+ \log\log\xi - \log\log a\,.$$

D'où:

$$\sum_{\substack{p\leqq\xi \\ p\equiv l\ (mod\ k)}} \frac{1}{p} = \frac{\log\log\xi}{\varphi(k)} + B_{k,l} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} - \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\,dt\,, \tag{6}$$

avec

$$B_{k,l} = \int_a^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{\varphi(k)}\cdot\frac{\mathrm{li}(a)}{a} - \frac{\log\log a}{\varphi(k)}\,. \tag{7}$$

Des relations (6) et (7) on déduit que $B_{k,l}$ ne dépend pas de a, mais seulement de k et l. D'autre part:

$$\sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \mathrm{li}\left(\frac{x}{j}\right) + \sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right).$$

Mais

$$\sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \mathrm{li}\left(\frac{x}{j}\right) = \int_1^{\frac{x}{\xi}} \mathrm{li}\left(\frac{x}{t}\right) d[t] = \left[\frac{x}{\xi}\right]\mathrm{li}(\xi) + x\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{[t]}{t^2(\log x - \log t)}\,dt =$$

$$= \left[\frac{x}{\xi}\right]\mathrm{li}(\xi) + x(\log\log x - \log\log\xi) - x\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)}\,dt\,.$$

D'où:

$$\sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = \frac{1}{\varphi(k)}\left[\frac{x}{\xi}\right]\mathrm{li}(\xi) + \frac{x}{\varphi(k)}(\log\log x - \log\log\xi) - \tag{8}$$

$$- \frac{x}{\varphi(k)}\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)}\,dt + \sum_{1\leqq j\leqq\frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right)$$

La relation (4) s'obtient alors en portant (6) et (8) dans le second membre de (5), et après avoir tenu compte de:

$$\sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\}.$$

b) *Le théorème 2 implique le théorème 1.* En effet, pour $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{x}$, nous avons

$$0 \leqslant \frac{\log t}{\log x} \leqq \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$x \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt = \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left(1 - \frac{\log t}{\log x}\right)^{-1} dt =$$

$$= \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r\right) dt = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{x}{(\log x)^{r+1}} C_r -$$

$$- \frac{x}{\log x} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt + \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r \geqq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} C_r \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right],$$

puisqu'il existe une constante D_m (ne dépendant que de m) telle que, pour $0 \leqq r \leqq m - 1$ on ait:

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^r dt \leqslant D_m \frac{(\log x)^r}{\sqrt{x}}$$

et que d'autre part

$$\sum_{r \geqq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r \leqslant 2 \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^m.$$

Comme, pour tout $r \geqq 1$, nous avons:

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} = o\left(\frac{x}{(\log x)^r}\right), \quad \text{et} \quad x \, exp\left(-C' (\log x)^\alpha (\log\log x)^\beta\right) = o\left(\frac{x}{(\log x)^r}\right),$$

il en résulte bien que le théorème 2 implique le théorème 1.

c) *Démonstration du théorème 2.* Soit $\xi = \xi(x)$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \xi = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\xi} = +\infty$. Nous avons:

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\, dt = O\left[\int_{\xi}^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left(-C(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right) dt\right] =$$

$$= O\left[\exp\left(-C(\log \xi)^{\alpha}(\log\log \xi)^{\beta}\right)(\log \xi)^{1-\alpha}(\log\log \xi)^{-\beta}\right]$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = O\left[\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \frac{x}{j} \exp\left(-C\left(\log \frac{x}{j}\right)^{\alpha}\left(\log\log \frac{x}{j}\right)^{\beta}\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} O\left[\exp\left(-C(\log \xi)^{\alpha}(\log\log \xi)^{\beta}\right)\log \dfrac{x}{\xi}\right] x \ \textit{si}\ \beta \geqslant 0 \\[2ex] O\left[\exp\left(-C(\log x)^{\alpha}(\log\log x)^{\beta}\right)\log \dfrac{x}{\xi}\right] x \ \textit{si}\ \beta \leqslant 0\,. \end{cases}$$

D'après la relation (4) on voit donc, en prenant $\xi = \sqrt{x}$, que le théorème 2 est valable avec toute constante C' telle que $C' < 2^{-\alpha} C$.

d) *Démonstration du théorème 3.* Moyennant l'hypothèse (H_k) nous avons: $\eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi)$, et par suite les majorations

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\, dt = O\left(\int_{\xi}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} \log t\, dt\right) = O\left(\frac{\log \xi}{\sqrt{\xi}}\right),$$

$$\text{et} \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\xi}} \log x\right),$$

et d'autre part

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l\ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\} = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right), \text{ et } \left\{\frac{x}{\xi}\right\} \eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi) = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right).$$

Le terme-erreur est donc d'ordre minimal dès que $\dfrac{\xi}{\log \xi}$ et $\dfrac{\chi}{\sqrt{\xi}} \log x$ sont de même ordre, ce qui est réalisé dès que $\xi = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$. D'où le théorème 3.

3. De la démonstration du théorème 3 on tire facilement le résultat suivant:

Corollaire 1. Soit $\xi(x)$ une fonction réelle définie sur $[1, +\infty[$, vérifiant

$1 \leqq \xi(x) \leqq x$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\xi(x)}{x^{\frac{2}{3}} \log x^{\frac{4}{3}}} = +\infty$. Alors, si l'hypothèse (H_k) est vraie, nous avons pour $x \to +\infty$:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x} \int_{\frac{x}{\xi(x)}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt .$$

En particulier, lorsque $\xi(x) = o(x)$, nous avons:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

Il nous semble raisonnable de conjecturer que la relation

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

reste vraie lorsque $\xi(x) = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$
[et même chaque fois que

$$\left.\frac{1}{2} < \liminf_{x \to +\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} \leqslant \limsup_{x \to +\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} < 1 .\right]$$

Si cette conjecture est vraie, on peut améliorer le théorème 3, en obtenant un terme-erreur qui est $o\left[x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{1}{3}}\right]$, et même mieux.

4. *Extensions des théorèmes 1 à 3.*

a) De même que pour la somme $\sum\limits_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n)$, la méthode de l'hyperbole permet d'obtenir des résultats analogues aux théorèmes 1 à 3 (développement asymptotique et reste intégral) pour la somme $\sum\limits_{1 \leq n \leq x} (\omega_{k,l}(n))^h$, h entier $\geqslant 2$. Signalons seulement le développement asymptotique)[7]:

THÉORÈME 4. *Soit h un entier $\geqq 1$. Il existe dans* $\mathbf{R}[X]$ *un polynôme P_o de degré h et de coefficient du terme du plus haut degré* $\dfrac{1}{\varphi(k)},$ *et une suite de*

7) H. Delange a récemment obtenu un tel résultat, et par une méthode différente et plus générale, pour toutes les fonctions additives à valeurs entières $\geqq 0$, et valant 1 sur l'ensemble des nombres premiers.

polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_r, \ldots$ *de degré* $h-1$ *tels que, lorsque* $x \to +\infty$, *on ait pour tout* $m \geqq 1$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} (\omega_{k,l}(n))^h = x \sum_{r=0}^{m} \frac{P_r(\log\log x)}{(\log x)^r} + O\left[\frac{(\log\log x)^{h-1}}{(\log x)^{m+1}}\right]$$

Indiquons le principe de la démonstration, pour simplifier, dans le cas $h = 2$. Nous avons:

$$(\omega_{k,l}(n))^2 = \omega_{k,l}(n) + 2 \sum_{p_2/n} 1 , \tag{9}$$

où p_2 décrit les entiers décomposables en produit de deux facteurs premiers distincts et $\equiv l \pmod k$. Comme on connaît le développement asymptotique [8]) de $\sum_{p_2 \leqq x} 1$, la démonstration s'achève par la méthode de l'hyperbole, grâce à la relation (9), de manière analogue au théorème 1.

b) Il est clair que les théorèmes asymptotiques 1 à 4 s'étendent à une large classe de fonctions fortement additives[9]): c'est le cas pour toutes les fonctions totalement additives $f(n)$ pour lesquelles il existe une fonction réelle $\theta(x)$ « suffisamment dérivable » (par exemple de classe C^1) et « suffisamment régulière » (par exemple $\theta(x) = x^\lambda$, $\lambda > 0$; $\theta(x) = (\log x)^\lambda$, $\lambda > 0$) telle que $f(p) = \theta(p)\, \chi_{k,l}(p)$, où $\chi_{k,l}$ est la fonction caractéristique des nombres premiers $\equiv l \pmod k$. On peut alors calculer les développements de $\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} (f(n))^h$, h entier $\geqq 1$.

Par exemple, si $S_\lambda(n)$ est la somme des puissances λièmes des diviseurs premiers de n $(\lambda > 0)$, nous pouvons trouver une suite de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ ne dépendant que de λ et telles que, lorsque $x \to +\infty$, on ait pour tout entier $m \geqq 2$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} S_\lambda(n) = \frac{\zeta(\lambda+1)}{\lambda+1} \cdot \frac{x^{\lambda+1}}{\log x} + \sum_{r=2}^{m} \alpha_r \frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^{m+1}}\right].$$

III. Sur un théorème de Rényi et Delange

1. Soient $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n, et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers. Autrement dit, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, où les p_i sont

8) Cf. [11].

9) Une fonction arithmétique additive est dite fortement additive si $f(p^m) = f(p)$ pour tous p premier et m entier $\geqq 1$.