

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** 2. Etude de l'anneau des S-entiers  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43865>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. ÉTUDE DE L'ANNEAU DES $S$ -ENTIERS

Conservons les notations du §1. Puisque le groupe des classes de  $A$  est d'ordre fini (théorème (2)), il existe pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq d$  un exposant  $n_j \geq 1$  (l'ordre de la classe de  $\mathfrak{p}_j$ ) tel que l'idéal  $\mathfrak{p}_j^{n_j}$  soit principal, disons

$$\mathfrak{p}_j^{n_j} = x_j A \quad (x_j \in A).$$

Il est clair que  $v_j(x_j) = n_j$ . En revanche, pour tout idéal premier  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_j$ , on a  $v_{\mathfrak{q}}(x_j) = 0$  ( $v_{\mathfrak{q}}$  désignant la valuation discrète normalisée associée à  $\mathfrak{q}$ : si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$ ,  $v_{\mathfrak{q}} = v_i$ ): dans le cas contraire, en effet, on aurait  $x_j \in \mathfrak{q}$ , donc  $x_j A = \mathfrak{p}_j^{n_j} \subset \mathfrak{q}$ , donc successivement  $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}$  (contradiction!) puisque  $\mathfrak{q}$  est premier et  $\mathfrak{p}_j$  maximal.

Il résulte de là que les  $x_j$  sont des  $S$ -unités. Posons alors  $t = x_1 x_2 \dots x_d$  (c'est aussi une  $S$ -unité) et désignons par  $T$  la partie multiplicative  $\{1, t, t^2, \dots, t^m, \dots\}$  de  $A$ .

Proposition 1.

(i) Pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq d$ , on a  $v_j(t) > 0$ . Au contraire, pour tout idéal premier  $\mathfrak{q} \notin D$  (on identifie pour simplifier les ensembles  $D$  et  $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_d\}$ ), on a  $v_{\mathfrak{q}}(t) = 0$ .

(ii) L'anneau  $A_S$  des  $S$ -entiers de  $K$  est égal à l'anneau de fractions  $T^{-1}A$ .

(iii)  $A_S$  est un anneau de Dedekind.

(iv) L'application  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}A_S$  établit une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  n'appartenant pas à  $D$  sur l'ensemble des idéaux premiers de  $A_S$ . Cette application « tue » les idéaux premiers appartenant à  $D$ : si  $1 \leq j \leq d$ ,  $\mathfrak{p}_j A_S = A_S$ .

(v) L'application  $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}A_S$  est une surjection de l'ensemble des idéaux entiers de  $A$  sur l'ensemble des idéaux entiers de  $A_S$ . Pour que  $\mathfrak{a}A_S = A_S$ , il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de  $\mathfrak{a}$  appartiennent à  $D$ .

DÉMONSTRATION:

(i) résulte de la définition de  $t$ . (iii) et (iv) sont des conséquences immédiates de (ii) et des propriétés des anneaux de fractions (voir [10], chap. 5, prop. 1 et 3). Enfin (v) résulte immédiatement de (iii) et (iv).

Resté à prouver (ii). L'inclusion  $T^{-1}A \subset A_S$  est évidente, puisqu'on a déjà remarqué que  $t$  est une  $S$ -unité, donc que les  $1/t^m$  ( $m \geq 0$ ) sont des  $S$ -entiers. Inversement, soit  $y \in A_S$ , et considérons le produit  $yt^m$  ( $m \geq 0$ ). En tout  $\mathfrak{q} \notin D$ , on a, d'après (i),

$$v_{\mathfrak{q}}(yt^m) = v_{\mathfrak{q}}(y) \geq 0.$$

En  $\mathfrak{p}_j \in D$ , on a, toujours d'après (i),

$$v_j(yt^m) = v_j(y) + mv_j(t) \geq v_j(y) + m.$$

Choisissons pour  $m$  une valeur  $\geq \sup_j |v_j(y)|$  et posons  $x = yt^m$ . Pour toute valuation discrète normalisée  $v$  de  $K$ , on a alors  $v(x) \geq 0$ : donc  $x \in A$ ,  $y = x/t^m \in T^{-1}A$ , et finalement  $A_S \subset T^{-1}A$ , ce qui achève de démontrer (ii), et la proposition.

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3)

Nous noterons  $z_1, z_2, \dots, z_s$  les coordonnées dans l'espace  $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{r+1} \times \mathbf{R}^d$ .

La démonstration se décomposera en quatre parties:

(a)  $L$ 'homomorphisme  $\Lambda$  a pour noyau  $W$ .

En effet, si  $x \in U_S$ , l'égalité  $\Lambda(x) = 0$  implique d'abord

$$|x|_{a+1} = \dots = |x|_s = 1,$$

ce qui signifie que  $x$  est non seulement une  $S$ -unité, mais une unité de  $A$ ;  $\Lambda(x) = 0$  implique d'autre part  $|x|_1 = \dots = |x|_a = 1$ , ce qui montre que cette unité  $x$  appartient au noyau de  $L$ , donc à  $W$  (théorème (1)); inversement, il est clair que  $x \in W$  implique  $\Lambda(x) = 0$ . D'où (a).

(b)  $\Lambda(U_S)$  est un sous-groupe discret de  $\mathbf{R}^s$ .

Les valeurs absolues  $|\cdot|_{a+1}, \dots, |\cdot|_s$  provenant de valuations discrètes, il est clair qu'on peut trouver dans  $\mathbf{R}^d$  un voisinage  $V'$  de l'origine tel que la condition

$$(\log |x|_{a+1}, \dots, \log |x|_s) \in V'$$

implique  $|x|_{a+1} = \dots = |x|_s = 1$ , ce qui signifie (si  $x \in U_S$ ) que  $x$  est en fait une unité de  $A$ . Soit alors  $V$  un voisinage borné de 0 dans  $\mathbf{R}^a$ : la double condition

$$x \in U_S \text{ et } \Lambda(x) \in V \times V'$$

peut s'écrire

$$x \in U \text{ et } L(x) \in V,$$