Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 6. Le cas kählérien.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

(**5.2**) $\operatorname{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^p} \operatorname{vol}(Y, g), \operatorname{quot}(P_i^n, g) = \dfrac{\operatorname{vol}(P_i^n, g)}{(\operatorname{carc}(P_i^n, g))^n}.$

La question qui se pose d'abord est le calcul des $\operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$; pour $i = 1$, c'est fait. Pour $i = 2, 4, 8$, voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

(**5.3**) « $\mathrm{I}(n;i)$ »: $\forall g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, \mathrm{g}) \geqq \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$;

(**5.4**) « $IC(n;i)$ »: « $I(n;i)$ » et « $\operatorname{quot}(P_i^n, g) = \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$ entraîne (P_i^n, g) et (P_i^n, g_0) sont isométriques »;

(**5.5**) « $P(n;i)$ »: $\exists\, k > 0$ telle que $\forall g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, g) \geqq k$.

Voir le tableau, page 85.

6. *Le cas kählérien.*

Soit (M, g) une variété *hermitienne*, c'est-à-dire que M possède une structure analytique complexe, dont on notera J la multiplication par $(-1)^{1/2}$ sur le fibré réel TM, et que g commute avec $J : \forall x, y :$ $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$. On en déduit sur M une forme alternée de degré deux ω, par

(**6.1**) $\forall x, y : \omega(x, y) = g(x, J(y))$.

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si Y est une sous-variété compacte de dimension deux de M, alors

(**6.2**): $\operatorname{vol}(Y, g) \geqq \int_Y \omega_Y$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* Y *est une sous-variété analytique complexe.*

Supposons de plus (M, g) kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$ (on appelle ω la forme de Kähler de (M, g)). Si Y et Z sont homotopes:

(**6.3**) $\int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant, (P_2^n, g_0) est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$. D'après (6.2) et (6.3), quel que soit $Y \sim P_2^1$ et parce que $P_2^1 \subset P_2^n$ est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler ω_0 de (P_2^n, g_0):

$$\operatorname{vol}(Y, g_0) \geqq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \operatorname{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f: M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\operatorname{vol}(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega_0 = \operatorname{vol}(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\operatorname{vol}(Y, g) \geqq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \operatorname{carc}(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « *IC* $(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 . 7 . 5 . 3$. (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « *IC* $(n;4)$ » ou « *IC* $(2;8)$ ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$\textbf{(7.1)} \qquad \operatorname{quot}(M, g) = \frac{\operatorname{vol}(M, g)}{(\operatorname{carc}(M, g))^n}, \ \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(S^1 \times S^1, g)$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).