Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Kapitel: 12. Variétés telles que « TGPS ».

Autor: Berger, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

12. *Variétés telles que « TGPS ».*

Un exemple surprenant est la surface de Zoll:

(12.1): *théorème* (Zoll, [16]): *sur* S^2 *il existe des* s.r. g *telles que* « TGPS » *et que* $(\mathrm{S}^2, \mathrm{g})$ *ne soit pas isométrique à* $(\mathrm{S}^2, \mathrm{g}_0)$.

Ainsi « *TGPS* » n'est pas caractéristique des (P_i^n, g_0) en toute généralité. D'ailleurs (communication de A. Weinstein) on peut construire des s.r. analogues sur les $S^n \ \forall\, n \geqq 2$. Cependant « *TGPS* » caractérise (P_1^2, g_0):

(12.2): *théorème* (Green, [9]): *si* $(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}_0)$ *est telle que* « TGPS », *alors* $(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g})$ *est isométrique à* $(\mathrm{P},_2^1\, \mathrm{g}_0)$.

Toutes les généralisations possibles de (12.2), pour différents n et i, sont des problèmes entièrement ouverts. La démonstration de (12.2) est absolument particulière à la dimension deux; elle utilise, pour vol (P_1^2, g), deux inégalités en sens contraire; la première est basée sur la formule de Gauss-Bonnet en dimension deux et une inégalité dont l'extension en dimension plus grande ne correspond plus à la formule de Gauss-Bonnet. La deuxième inégalité utilise une formule de géométrie intégrale de Santalo dont l'extension en dimension plus grande ne fonctionne que si le projectif (P_1^n, g) (pour lequel on voudrait démontrer une généralisation du théorème (12.2)) possédait une hypersurface homotope à P_1^{n-1} et totalement géodésique, ce qui n'est pas le cas en général.

13. *Existence d'une géodésique périodique.*

Une variété complète, non compacte, même non simplement connexe, n'admet pas nécessairement de géodésique périodique (g.p.); exemple la surface de révolution ci-après: