Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES
Autor: Lesieur, L.
Kapitel: 5. (k, r) plans combinatoires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43861

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	4	9	23	68
3				1	3	11	49	617
4					1	4	22	217
5						1	5	40
6							1	6
7								1
g_n		1	2	4	9	26	101	950

Si l'on pose $g_n = g_{n1} + g_{n2} + \dots + g_{n,n-1}$ = (nombre total des géométries différentes sur n éléments), on constate que $g_{n+1} \# (g_n)^{\frac{3}{2}}$ ce qui donnerait environ 30 000 géométries différentes sur un ensemble à 9 points.

Nous allons donc pour continuer nous limiter au cas des plans ($d=2$), ligne soulignée du tableau.

4. *Géométries planes combinatoires*

Si $d = 2$, les seules variétés sont les points, les droites et l'ensemble S tout entier. Une géométrie plane combinatoire pourra alors être définie par l'ensemble S de ses points et l'ensemble de ses droites, qui est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(S)$ satisfaisant aux axiomes suivants (cf [3], p. 318).

G_1. Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

G_2. Toute droite contient au moins deux points distincts.

G_3. Il existe 3 points non situés sur une même droite.

Si l'ensemble S est fini, on obtient un plan combinatoire fini.

5. (k, r) *plans combinatoires*

Nous allons considérer maintenant des géométries planes combinatoires finies qui sont également des (k, r, s) plans au sens de G. Heuze [7] et des « blocks-designs » ou configurations tactiques au sens de [2], § 2. D'une façon précise nous définissons un (k, r) *plan combinatoire* par les axiomes suivants (concernant comme toujours, un ensemble S de points et un sous-ensemble de $\mathcal{P}(S)$ dont les éléments sont dénommés droites)

1. Par 2 points distincts il passe une droite et une seule
2. Toute droite contient k points distincts ($k \geqslant 2$) et k seulement
3. Tout point appartient à r droites distinctes, et r seulement
4. Il existe 3 points non alignés: triangle p, q, r.

Il est clair que ces axiomes renforcent ceux des géométries planes combinatoires (comparer avec G_1, G_2, G_3); ils coïncident d'autre part avec les (k, r, s) plans de G. HEUZE lorsqu'on prend $s = k$ [7], et avec les blocks designs de Dembowski lorsqu'on prend le paramètre $b_2 = \lambda$ égal à 1. Etudions les premières propriétés de ces plans.

Propriété 1. On a $r \geqslant k$ (1)

En effet, si a est un point donné, il existe au moins une droite ne passant pas par a, par exemple l'un des côtés du triangle p, q, r. Sur cette droite D se trouvent k points dont chacun détermine avec a une droite passant par a. Il y a donc au moins k droites passant par a. Les autres, qui ne rencontrent pas D sont en nombre $h = r - k \geqslant 0$, nombre qu'on peut appeler *nombre d'Euclide* du plan.

Propriété 2. Un (k, r) *plan combinatoire est fini et le nombre de ses points est* $\boxed{v = 1 + (k-1)\, r}$ (2)

En effet, si O est un point fixé, tous les autres points p sont situés sur les droites passant par O.

Sur chaque droite se trouvent $k - 1$ points autres que O et on balaye tout le plan avec l'ensemble de ces r droites, d'où la formule.

Propriété 3. Le nombre b *des droites (ou blocs) est donné par la formule* $\boxed{k\, b = vr}$ *et on a* $b \geqslant v$. (3)

En effet il y a k points sur chaque droite d'où kb points dont chacun est compté r fois. On en déduit la formule (3). L'inégalité $b \geqslant v$ résulte de (1).

Propriété 4. Les plans projectifs finis sont les (k, r) *plans combinatoires pour lesquels* $r = k \geqslant 3$ *(ou* $h=0$*) et les plans affines sont les* (k, r) *plans combinatoires pour lesquels* $r = k + 1$ *(ou* $h=1$*)*

Il en résulte que la classe des plans (k, r) — plans combinatoires va comprendre celle des plans projectifs finis et celle des plans affines finis.

Propriété 5. k *divise* $r\,(r-1)$ *donc* $h\,(h-1)$ (4)

En effet $kb = vr = r + (k-1)\,r^2 = kr^2 - r\,(r-1)$

Propriété 6. $k\,(k-1)$ *divise* $v\,(v-1)$ (5)

Cela résulte de $v\,(v-1) = v\,(k-1)\,r = k\,(k-1)\,b$.

En vue d'étudier les (k, r) plans combinatoires à v éléments, v donné, on peut remarquer qu'il existe toujours la solution:

$$k = 2\,r = v - 1.$$

qui est la solution triviale d'un ensemble à v éléments dont les droites sont constituées par les sous-ensembles à deux éléments. Cette solution est représentée par exemple par v points en position générale dans le plan. Nous l'écarterons des solutions explicites que nous allons maintenant donner pour le cas $v \leqslant 20$. A titre d'exemple, on peut vérifier que les 4 possibilités trouvées au § 3 pour les plans combinatoires à 5 éléments ne donnent qu'un (k, r)-plan, le dernier cas, qui correspond précisément à $k = 2$, $r = 4$.

6. *Les* (k, r) *plans combinatoires à* v *éléments,* $v < 20$.

Indiquons sur le cas $v = 13$ le procédé de recherche des conditions nécessaires.

On utilise les conditions nécessaires $v - 1 = (k-1)\,r$, $r \geqslant k$, $k \mid r\,(r-1)$; on a donc: $v - 1 = 12 = 3 \times 2 \times 2$ d'où les possibilités:

$k - 1 = 1$, $r = 12$ c'est-à-dire $k = 2$, $r = 12$ (solution triviale)
$k - 1 = 2$, $k = 3$, $r = 6$ qui vérifie bien $k \mid r\,(r-1)$.
$k - 1 = 3$, $k = 4$, $r = 4$ qui donne le plan projectif d'ordre 3.
$k - 1 = 4$, $k = 5$, $r = 3$ est impossible $(r \geqslant k)$.

En procédant de même pour tous les nombres $v < 20$ et en écartant les solutions triviales et celles qui correspondent aux plans projectifs ou aux plans affines, il reste les trois cas suivants à étudier pour lesquels le problème d'existence se pose.

1er cas. $v = 13$, $k = 3$, $r = 6$.

En numérotant les points 0, 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′, 4, 4′, 5, 5′, 6, 6′ on peut obtenir, après quelques tâtonnements, une solution avec les 26 droites suivantes: