

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES SUR UN CORPS FINI
Kapitel: §2. Seconde démonstration du théorème de Chevalley- Warning.
Autor: Joly, Jean-René
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46287>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROPOSITION 1. — *Si un corps commutatif K possède la propriété (C_1) , alors il possède la propriété (B_0) .*

Démonstration. — Soit en effet L un corps gauche de centre K et de degré fini n sur K . On sait que n est un carré (soit $n = d^2$) et que si e_1, \dots, e_n est une base de L sur K (en tant qu'espace vectoriel), la norme réduite $Nrd_{L/K}(x)$ d'un élément quelconque $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ de L est un polynôme homogène et de degré d , à coefficients dans K , par rapport aux composantes x_1, \dots, x_n de x , qui sont dans K (voir par exemple Bourbaki, Algèbre, chap. VIII, § 12; dans le cas bien connu du corps \mathbf{H} des quaternions ordinaires sur \mathbf{R} , rapporté à la base canonique $1, i, j, k$, on a $n = 4 = 2^2$ et $Nrd_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$); cette norme réduite ne s'annule que pour $x = 0$, donc pour $x_1 = \dots = x_n = 0$; comme K est supposé posséder la propriété (C_1) , on a nécessairement $n = d^2 \leq d$, donc $d = 1$, $n = 1$ et $L = K$, C.Q.F.D.

Redémontrons alors le théorème de Wedderburn; soit L un corps fini, non supposé commutatif, et soit k son centre; k est un corps fini commutatif, et il possède la propriété (C_1) (cor. 2), donc la propriété (B_0) (prop. 1); mais comme L est évidemment de degré fini sur k , on a alors $L = k$ (par définition de (B_0)), et par conséquent L est commutatif, C.Q.F.D.

§ 2. *Seconde démonstration du théorème de Chevalley-Waring.*

2.1. Cette seconde démonstration, indépendante de la théorie des polynômes réduits, repose sur le théorème suivant (dont on aura également besoin au § 3):

THÉORÈME 2. — *Soit $F \in k[X]$ un polynôme à n variables, et de degré d . Alors, si $d < n(q-1)$, on a*

$$(2.1.1) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(\mathbf{x}) = 0.$$

Démonstration. — Par linéarité, on peut se ramener au cas où F est un monôme $X_1^{u_1} \dots X_n^{u_n}$, avec $d = u_1 + \dots + u_n < n(q-1)$; on a alors

$$(2.1.2) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x_i \in k} x_i^{u_i} \right);$$

l'inégalité relative à d montre que pour un i au moins, $u_i < q-1$, et il suffit évidemment de prouver que, dans (2.1.2), le i -ème facteur du membre de droite est alors nul, ce qui résulte du lemme suivant:

LEMME 1. — Soit u un entier ≥ 0 , et posons $S_u = \sum_{x \in k} x^u$; alors

(i) si u est non nul et divisible par $q - 1$, $S_u = -1$;

(ii) sinon, $S_u = 0$.

En particulier, si $u < q - 1$, $S_u = 0$.

Prouvons ce lemme; comme $x^q = x$ pour tout $x \in k$, on ne restreint pas la généralité de la démonstration en supposant $0 \leq u \leq q - 1$; on est ainsi amené à distinguer trois cas:

(1) $u = 0$: S_u est alors somme de q termes égaux à 1; comme q est divisible par la caractéristique p de k , on a bien $S_u = 0$;

(2) $u = q - 1$: alors $x^u = 0$ pour $x = 0$, et $x^u = 1$ sinon; S_u est donc somme de $q - 1$ termes égaux à 1, et on conclut comme en (1);

(3) $0 < u < q - 1$: la proposition 7 (chap. 1) avec $d = u$ montre qu'il existe dans k^* un élément a tel que $a^u \neq 1$; comme $x \mapsto ax$ est une bijection de k sur k , on peut écrire $S_u = \sum_{x \in k} (ax)^u = a^u S_u$; mais ceci donne $(a^u - 1) S_u = 0$, donc, en simplifiant par $a^u - 1 \neq 0$, $S_u = 0$, C.Q.F.D.

On aurait également pu régler les cas (2) et (3) de la façon suivante: soit g un générateur de k^* ; les éléments x de k sont alors 0, et les g^i avec $0 \leq i \leq q - 2$; S_u est donc égal à la somme de la progression géométrique $1 + g^u + g^{2u} + \dots + g^{(q-2)u}$; d'où $S_u = (1 - g^{(q-1)u}) / (1 - g^u)$, ce qui vaut bien 0, puisque $g^{q-1} = 0$. Remarquons par ailleurs que la nullité des $q - 2$ quantités S_u ($0 < u < q - 1$) équivaut, compte tenu des *formules de Newton*, à la nullité des $q - 2$ fonctions symétriques élémentaires des éléments de k^* autres que le produit (voir chap. 1, sect. 1.1).

2.2. Utilisons maintenant le théorème 2 pour redémontrer le théorème de Chevalley-Warning. Considérons le polynôme \bar{F} défini par (1.1.2) (sect. 1.1); il est de degré $d(q-1) < n(q-1)$, puisqu'on a supposé $n > d$; le théorème 2 permet donc d'écrire

$$(2.2.1) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = 0;$$

mais $\bar{F}(\mathbf{x})$ vaut 1 si $\mathbf{x} \in V$, et 0 si $\mathbf{x} \notin V$; d'où une seconde égalité:

$$(2.2.2) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = N.1;$$

(2.2.1) et (2.2.2) donnent alors $N.1 = 0$, soit, puisque k est de caractéristique p , $N \equiv 0 \pmod{p}$, C.Q.F.D.