

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES SUR UN CORPS FINI  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** §3. Sommes de Jacobi à deux caractères.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46287>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

§ 3. Sommes de Jacobi à deux caractères.

3.1. Soient maintenant  $\chi$  et  $\psi$  deux caractères multiplicatifs du corps fini  $k$ .

DÉFINITION 2. — On appelle somme de Jacobi associée à  $\chi$  et  $\psi$  la quantité

$$(3.1.1) \quad \pi(\chi, \psi) = \sum_{x \in k} \chi(x) \psi(1-x).$$

Comme le second membre de (3.1.1) peut également s'écrire  $\sum_{x+y=1} \chi(x) \psi(y)$  on voit que  $\pi(\chi, \psi) = \pi(\psi, \chi)$ . Il est clair d'autre part que  $\pi(\chi, \psi)$  est un entier du corps des racines  $(q-1)$ -ièmes de l'unité.

3.2. Si l'un des deux caractères  $\chi$  et  $\psi$  est trivial, la somme de Jacobi est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) et de la convention (1.4.1):

- (i) si  $\chi = \psi = \varepsilon$ , on a  $\pi(\chi, \psi) = q$ ;
- (ii) si  $\chi = \varepsilon$  et  $\psi \neq \varepsilon$  (ou l'inverse), on a  $\pi(\chi, \psi) = 0$ .

3.3. Passons au cas non trivial.

PROPOSITION 9. — Supposons  $\chi$  et  $\psi$  non triviaux. Alors

- (i) Si  $\chi\psi = \varepsilon$ , on a

$$(3.3.1) \quad \pi(\chi, \psi) = -\chi(-1).$$

- (ii) Si au contraire  $\chi\psi \neq \varepsilon$ , la somme de Jacobi  $\pi(\chi, \psi)$  se calcule à l'aide des sommes de Gauss non triviales  $\tau(\chi)$ ,  $\tau(\psi)$  et  $\tau(\chi\psi)$  par la formule

$$(3.3.2) \quad \pi(\chi, \psi) = \tau(\chi)\tau(\psi)/\tau(\chi\psi).$$

(Les trois sommes de Gauss figurant dans le membre de droite sont supposées calculées à l'aide d'un même caractère additif non trivial  $\beta$  de  $k$ ).

Démonstration. — (i) Si  $\chi\psi = \varepsilon$ , on a  $\psi = \chi^{-1}$ , et on peut écrire

$$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x \neq 0, 1} \chi(x) \chi^{-1}(1-x) = \sum_{x \neq 0, 1} \chi(x/(1-x));$$

mais le quotient  $y = x/(1-x)$  est une fonction homographique régulière de  $x$ , et quand  $x$  prend toute valeur possible dans  $k$ , sauf 0 et 1,  $y$  prend toute valeur possible dans  $k$ , sauf 0 et  $-1$ ; ainsi,  $\pi(\chi, \psi) = \sum_{y \in k^*} \chi(y)$

—  $\chi(-1)$  et (3.3.1) résulte alors de (1.1.1) appliqué au caractère multiplicatif non trivial  $\chi$ .

(ii) La définition des sommes de Gauss et la convention (1.4.1) permettent d'écrire

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{x \in k} \sum_{y \in k} \chi(x)\psi(y)\beta(x+y);$$

dans le second membre, faisons le changement de variables  $(x, y) \mapsto (z, t)$  défini par  $z = x + y$  et  $tz = x$  (l'apparition de la valeur 0 n'est pas gênante, du fait que  $\chi(0) = \psi(0) = 0$ : on laisse au lecteur le soin d'examiner ce point en détail); il vient

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{z \in k} \sum_{t \in k} \chi(z)\chi(t)\psi(z)\psi(1-t)\beta(z),$$

ou encore

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \left( \sum_{z \in k} (\chi\psi)(z)\beta(z) \right) \left( \sum_{t \in k} \chi(t)\psi(1-t) \right),$$

c'est-à-dire finalement, puisque  $(\chi\psi)(0) = 0$ ,

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \tau(\chi\psi)\pi(\chi, \psi),$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. — *Si les trois caractères  $\chi$ ,  $\psi$  et  $\chi\psi$  sont non triviaux, on a*

$$(3.3.3) \quad |\pi(\chi, \psi)|^2 = q.$$

Démonstration. — Utiliser la proposition 9, (ii), puis la proposition 8.

COROLLAIRE 2. — *Supposons toujours le caractère  $\chi$  non trivial, et notons  $\delta$  son ordre. On a alors*

$$(3.3.4) \quad \tau(\chi)^\delta = q\chi(-1)\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}).$$

Démonstration. — Pour  $1 \leq j \leq \delta - 2$ , la proposition 9, (ii) donne

$$\pi(\chi, \chi^j) = \tau(\chi)\tau(\chi^j)/\tau(\chi^{j+1});$$

en multipliant membre à membre ces  $\delta - 2$  égalités, on obtient

$$\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}) = \tau(\chi)^{\delta-1}/\tau(\chi^{\delta-1});$$

mais  $\chi^{\delta-1} = \chi^{-1} = \bar{\chi}$ ; il suffit alors de multiplier les deux membres de cette dernière égalité par  $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1)$  pour obtenir (3.3.4).