Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
Autor: Joly, Jean-René
Kapitel: §3. Sommes de Jacobi à deux caractères.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46287

§ 3. *Sommes de Jacobi à deux caractères.*

3.1. Soient maintenant χ et ψ deux caractères multiplicatifs du corps fini k.

DÉFINITION 2. — *On appelle* somme de Jacobi *associée à* χ *et* ψ *la quantité*

(3.1.1) $$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x \in k} \chi(x) \psi(1-x).$$

Comme le second membre de (3.1.1) peut également s'écrire $\sum_{x+y=1} \chi(x) \psi(y)$ on voit que $\pi(\chi, \psi) = \pi(\psi, \chi)$. Il est clair d'autre part que $\pi(\chi, \psi)$ est un entier du corps des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité.

3.2. Si l'un des deux caractères χ et ψ est trivial, la somme de Jacobi est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) et de la convention (1.4.1):

(i) *si* $\chi = \psi = \varepsilon$, *on a* $\pi(\chi, \psi) = q$;

(ii) *si* $\chi = \varepsilon$ *et* $\psi \neq \varepsilon$ *(ou l'inverse), on a* $\pi(\chi, \psi) = 0$.

3.3. Passons au cas non trivial.

PROPOSITION 9. — *Supposons* χ *et* ψ *non triviaux. Alors*

(i) *Si* $\chi\psi = \varepsilon$, *on a*

(3.3.1) $$\pi(\chi, \psi) = -\chi(-1).$$

(ii) *Si au contraire* $\chi\psi \neq \varepsilon$, *la somme de Jacobi* $\pi(\chi, \psi)$ *se calcule à l'aide des sommes de Gauss non triviales* $\tau(\chi)$, $\tau(\psi)$ *et* $\tau(\chi\psi)$ *par la formule*

(3.3.2) $$\pi(\chi, \psi) = \tau(\chi)\tau(\psi)/\tau(\chi\psi).$$

(Les trois sommes de Gauss figurant dans le membre de droite sont supposées calculées à l'aide d'un même caractère additif non trivial β de k).

Démonstration. — (i) Si $\chi\psi = \varepsilon$, on a $\psi = \chi^{-1}$, et on peut écrire

$$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x \neq 0, 1} \chi(x) \chi^{-1}(1-x) = \sum_{x \neq 0, 1} \chi(x/(1-x));$$

mais le quotient $y = x/(1-x)$ est une fonction homographique régulière de x, et quand x prend toute valeur possible dans k, sauf 0 et 1, y prend toute valeur possible dans k, sauf 0 et -1; ainsi, $\pi(\chi, \psi) = \sum_{y \in k^*} \chi(y)$

$-\chi(-1)$ et (3.3.1) résulte alors de (1.1.1) appliqué au caractère multiplicatif non trivial χ.

(ii) La définition des sommes de Gauss et la convention (1.4.1) permettent d'écrire

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{x \in k} \sum_{y \in k} \chi(x)\psi(y)\beta(x+y);$$

dans le second membre, faisons le changement de variables $(x, y) \mapsto (z, t)$ défini par $z = x + y$ et $tz = x$ (l'apparition de la valeur 0 n'est pas gênante, du fait que $\chi(0) = \psi(0) = 0$: on laisse au lecteur le soin d'examiner ce point en détail); il vient

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{z \in k} \sum_{t \in k} \chi(z)\chi(t)\psi(z)\psi(1-t)\beta(z),$$

ou encore

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \Big(\sum_{z \in k} (\chi\psi)(z)\beta(z)\Big)\Big(\sum_{t \in k} \chi(t)\psi(1-t)\Big),$$

c'est-à-dire finalement, puisque $(\chi\psi)(0) = 0$,

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \tau(\chi\psi)\pi(\chi, \psi),$$

C.Q.F.D.

Corollaire 1. — *Si les trois caractères χ, ψ et $\chi\psi$ sont non triviaux, on a*

(3.3.3) $$|\pi(\chi, \psi)|^2 = q.$$

Démonstration. — Utiliser la proposition 9, (ii), puis la proposition 8.

Corollaire 2. — *Supposons toujours le caractère χ non trivial, et notons δ son ordre. On a alors*

(3.3.4) $$\tau(\chi)^\delta = q\chi(-1)\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}).$$

Démonstration. — Pour $1 \leqslant j \leqslant \delta - 2$, la proposition 9, (ii) donne

$$\pi(\chi, \chi^j) = \tau(\chi)\tau(\chi^j)/\tau(\chi^{j+1});$$

en multipliant membre à membre ces $\delta - 2$ égalités, on obtient

$$\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}) = \tau(\chi)^{\delta-1}/\tau(\chi^{\delta-1});$$

mais $\chi^{\delta-1} = \chi^{-1} = \bar{\chi}$; il suffit alors de multiplier les deux membres de cette dernière égalité par $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1)$ pour obtenir (3.3.4).