Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: Notes sur le chapitre 5

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46287

Notes sur le chapitre 5

§ **1**: le fait que $\mathbf{F}_p{}^+$ est en dualité avec lui-même par $(x, y) \mapsto e^{2\pi i x y / p}$ est évident, et connu « depuis toujours ». Les caractères multiplicatifs de $\mathbf{F}_p$ se sont introduits progressivement à partir du milieu du XVIII^e siècle avec l'étude des restes quadratiques (Euler, Legendre, Gauss), cubiques (Gauss, Jacobi, Eisenstein) et biquadratiques (Gauss, Jacobi).

§ **2**: les sommes de Gauss apparaissent (sous la forme déguisée des *périodes cyclotomiques*) dans la dernière section des *Disquisitiones Arithmeticae*: Gauss les utilise pour étudier, avant la lettre, le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q}(e^{2\pi i/p})/\mathbf{Q}$; à ce sujet, voir par exemple [**8**], pp. 453-460. Par la suite, les sommes de Gauss reparaissent systématiquement dans les travaux arithmétiques de Gauss, Jacobi, Eisenstein, Kummer, Stickelberger, en relation notamment avec l'étude des lois de réciprocité, et avec la représentation des nombres premiers par des formes quadratiques binaires à coefficients entiers; pour une synthèse de ces travaux, voir le livre centenaire de Bachmann (*Die Lehre von der Kreistheilung*, Teubner, Leipzig, 1872), ainsi que Stickelberger (1890). (L'utilisation de la somme de Gauss $\tau = \sum_{x \bmod p} \left(\frac{x}{p}\right) e^{2\pi i x/p}$ pour démontrer la loi de réciprocité quadratique est bien connue: voir [**8**], pp. 116-117, ou [**17**], chap. 1, sect. 3.3).

§ **3-4**: les sommes de Jacobi apparaissent également dans les travaux mentionnés ci-dessus; elles y sont *définies* à partir des sommes de Gauss par une formule qui coïncide avec la formule (3.3.2). Elles sont étudiées systématiquement chez Stickelberger (1890), Davenport-Hasse (1934) et Weil (1949) (ce dernier article contient d'ailleurs d'intéressantes indications historiques).

Chapitre 6

ÉQUATIONS DIAGONALES (II)

Ce chapitre utilise les propositions 3 et 5 du chapitre 5 pour établir des formules donnant le nombre exact $N(b)$ de solutions dans k^n d'une équation diagonale $a_1 X_1^{d_1} + \ldots + a_n X_n^{d_n} = b$ à coefficients dans k (k désigne toujours un corps fini à q éléments). Ces formules font intervenir des sommes de