

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES SUR UN CORPS FINI  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** Notes sur le chapitre 6  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46287>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La relation (3.4.1) (c'est-à-dire l'égalité  $N_4 = N_2 + 1$ ) peut aussi se démontrer en appliquant aux deux polynômes  $P_2(X) = 1 - X^4$  et  $P_4(X) = X - X^3$  le lemme suivant (qui se prouve sans difficulté):

LEMME 1. — (On suppose  $p \neq 2$ ). Soit  $P(X)$  un polynôme à une variable  $X$  et à coefficients dans  $k$ . Si  $\varphi$  désigne le caractère de Legendre de  $k$ , le nombre  $N_P$  de solutions sur  $k$  de l'équation  $Y^2 = P(X)$  est donné par

$$(3.4.2) \quad N_P = q + \sum_{x \in k} \varphi(P(x)).$$

Au sujet de cette seconde méthode, voir Morlaye (1972).

**3.5.** Dans la section 3.3, on a supposé  $q$  congru à 1 modulo 6 (ou modulo 4, ou modulo 3) pour pouvoir calculer  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  par application directe de la proposition 3. On laisse au lecteur le soin de vérifier (ce qui est immédiat) les assertions suivantes:

si  $q \equiv -1 \pmod{6}$ , on a  $N_1 = q$ ; si  $q \equiv -1 \pmod{4}$ , on a  $N_2 = q + 1$ ; si  $q \equiv -1 \pmod{3}$ , on a  $N_3 = q$ ; enfin, si  $q \equiv -1 \pmod{4}$ , on a  $N_4 = q$ .

### Notes sur le chapitre 6

§ 1-2: le lien entre nombre de solutions d'une congruence diagonale modulo  $p$  et sommes de Gauss et de Jacobi avait déjà été remarqué par Gauss et Jacobi eux-mêmes, notamment pour les congruences  $aX^3 - bY^3 \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $aX^4 - bY^4 \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $Y^2 \equiv aX^4 - b \pmod{p}$ ; à ce sujet, voir Weil (1949), pp. 497-498. La congruence  $X^n + Y^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  a été étudiée par Libri (1832) pour  $n = 3, 4$ , puis, beaucoup plus tard, par Pellet, Jacobsthal, ainsi que Dickson (1909), Hurwitz (1909), Schur (1916), Mordell (1922), etc., pour  $n$  quelconque, en relation avec le théorème de Fermat. La congruence  $X_1^k + \dots + X_s^k \equiv m \pmod{p}$  a été étudiée notamment par Hardy-Littlewood (1922) dans leurs travaux sur le problème de Waring. Le théorème 2, pour deux variables, est dû à Davenport-Hasse (1934), et, indépendamment, à Hua-Vandiver (1949, a; b) et Weil (1949) pour un nombre de variables quelconque.

§ 3: les propositions 1 et 2 (pour  $q = p$ ) figurent déjà dans Lebesgue (1837), où elles sont d'ailleurs démontrées d'une autre manière. La proposition 3 et les exemples de la section 3.3 sont empruntés à Davenport-Hasse (1934). Le lien entre nombre de solutions de  $Y^2 = X - X^3$  et de  $Y^2 = 1 - X^4$  semble avoir été remarqué (incidemment) pour la première fois par

Jacobsthal (1907). Pour  $q = p \equiv 1 \pmod{4}$ , la formule (3.4.1) peut, avec les notations de l'appendice du chapitre 5 (sect. A.1, exemple 2) et compte de la proposition 12 (*ibid.*), s'écrire  $N_4 = p - \lambda - \bar{\lambda}$ . Plus généralement, si  $D \in \mathbf{Z}$ , et si  $N_4(D)$  désigne le nombre de solutions de la congruence  $Y^2 \equiv DX - X^3 \pmod{p}$  (ou, ce qui revient au même, de  $Y^2 \equiv X^3 - DX \pmod{p}$ ), on a

$$N_4(D) = p - \left(\frac{D}{\bar{\lambda}}\right)_4 \lambda - \left(\frac{D}{\lambda}\right)_4 \bar{\lambda};$$

cette formule est due à Davenport-Hasse (1934), et a été redémontrée par Rajwade (1970); Morlaye (1972) vient de donner une version élémentaire de la démonstration de Davenport-Hasse. La courbe  $Y^2 = X^3 - DX$ , considérée comme variété abélienne de dimension 1 définie sur  $\mathbf{Q}$ , a servi de « banc d'essai » aux conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer; voir Birch-Swinnerton-Dyer (1965), ou Cassels-Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, chap. XII (Academic Press, 1967).

## CHAPITRE 7

### THÉORÈME D'AX

Le résultat central de ce chapitre est le théorème suivant, dû à Ax (1964), et qui précise le théorème de Chevalley-Warning (chap. 3, sect. 1.1):

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $k$  un corps fini à  $q = p^f$  éléments,  $F$  un polynôme de degré  $d$ , à  $n$  variables et à coefficients dans  $k$ , et  $b$  le plus grand entier strictement inférieur à  $n/d$ . Si alors  $N$  désigne le nombre de zéros de  $F$  dans  $k^n$ ,  $N$  est divisible par  $q^b$ .*

La démonstration de ce théorème est un peu analogue à celle du théorème 1 du chapitre 6 (ou plus précisément de son corollaire 1): elle consiste (du moins en principe): (1) à exprimer  $N$  à l'aide de sommes de Gauss, donc d'entiers du corps  $L$  des racines  $p(q-1)$ -ièmes de l'unité; (2) à calculer la « valeur absolue  $\mathfrak{P}$ -adique » de ces sommes en chaque idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $L$  au-dessus de  $p$ ; (3) à en déduire enfin l'inégalité  $|N|_p \leq |q^b|_p$ , où  $|\cdot|_p$