

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ERWEITERUNGSKÖRPER VON PRIMZAHLGRAD MIT DURCH  
DIESE PRIMZAHL TEILBARER KLASSENZAHL  
**Autor:** Gut, Max  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46288>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ERWEITERUNGSKÖRPER VON PRIMZAHLGRAD MIT DURCH DIESE PRIMZAHL TEILBARER KLASSENZAHL

von Max GUT

Wir beweisen in dieser Note mit elementaren Mitteln den *Satz*: Ist  $k^*$  ein beliebiger algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade, und ist  $q$  eine Primzahl, so gibt es immer unendlich viele Erweiterungskörper  $k$  vom Relativgrade  $q$  in bezug auf  $k^*$ , deren Klassenzahl durch  $q$  teilbar ist.

Für weitere Sätze aus dem Ideenkreis der vorliegenden Note verweise ich auf die inhaltsreiche Arbeit des Herrn *Erich Lamprecht*: „Existenz von Zahlkörpern mit nicht abbrechendem Klassenkörperturn“, *Archiv der Math.*, vol. 18 (1967), pg. 140—152.

Verwendet wird immer folgende Bezeichnung: ist  $S$  eine beliebige Substitution, so bedeute  $\{S\}$  die von  $S$  erzeugte Gruppe. Alle auftretenden Gruppen sind Abel'sche Gruppen. Ferner bedeute  $k_0$  den Körper der rationalen Zahlen.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass die Primzahl  $q$  *ungerade* ist. Wir werden später sehen, dass der Beweis für den Fall  $q = 2$  ganz analog geführt werden kann.

Durch direkte Konstruktion zeigen wir zunächst die Existenz *eines* solchen Erweiterungskörper  $k$  vom  $k^*$ , der die im Satze erwähnten Eigenschaften besitzt.

Es seien  $p_1$  und  $p_2$  zwei voneinander verschiedene ungerade Primzahlen, die  $\equiv 1 \pmod{q}$  und teilerfremd zur Diskriminanten von  $k^*$  sind.

Für  $t = 1$  und  $t = 2$  bedeute  $\zeta_t$  eine primitive  $p_t$ -te Einheitswurzel und  $g_t$  eine Primitivwurzel mod.  $p_t$ . Weiter bedeute  $s_t$  die Substitution, die  $\zeta_t$  in  $\zeta_t^{g_t}$  überführt; sie soll aber die Grösse  $\zeta_j$  mit  $j \neq t$  festlassen.

Eine  $\frac{1}{q}(p_t - 1)$  — gliedrige Periode des Körpers der  $p_t$ -ten Einheitswurzeln wird dann durch die Grösse

$$\eta_t = \sum_n s_t^{nq} \zeta_t$$

gegeben, wo in der Summe  $n$  die Werte  $0, 1, 2, \dots, \frac{1}{q}(p_t - 1 - q)$  durchläuft.

Für sie ist

$$s_t^q \eta_t = \eta_t,$$

und die Grössen  $s_t^m \eta_t$ , wo  $m$  die Werte  $0, 1, 2, \dots, q - 1$  durchläuft, sind alle voneinander verschieden. Da

$$s_t^{m+qz} \eta_t = s_t^m \eta_t$$

für jede ganze rationale Zahl  $z$  gilt, ist es für die Wirkung auf die  $q$  — gliedrigen Perioden bequemer, die Substitution  $S_t$  von der Primzahlordnung  $q$  einzuführen, für welche

$$S_t^m \eta_t = s_t^{m+qz} \eta_t = s_t^m \eta_t, \quad m = 0, 1, 2, \dots, q - 1$$

ist. Dabei soll  $S_t$  aber die Grösse  $\eta_j$  mit  $j \neq t$  festlassen.

Der Körper  $k_0(\eta_t)$  ist absolut Galois'sch, die Grössen  $S_t^m \eta_t$ , wo  $m = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ , bilden eine Basis für die ganzen Zahlen des Körpers, und

$$\sum_{m=0}^{q-1} S_t^m \eta_t = -1. \quad (1)$$

Die (absolute) Differente der Zahl  $\zeta_t$  ist ein Teiler von  $p_t^{p_t-2}$ . Mithin ist auch die (absolute) Differente der Zahl  $\eta_t$  ein Teiler von  $p_t^{p_t-2}$ , also auch von  $p_t^{p_t}$ .

Es sei  $m$  eine beliebige ganze rationale Zahl, und wir betrachten die ganzen algebraischen Zahlen

$$\xi_m = \sum_{n=0}^{q-1} (S_1^{m+n} \eta_1 S_2^n \eta_2). \quad (2)$$

Man erkennt sofort, dass für jede ganze rationale Zahl  $w$

$$\xi_{m+qw} = \xi_m$$

ist, d.h. der Index mod.  $q$  genommen werden darf.

Ferner folgt aus (1) sofort, dass

$$\sum_{m=0}^{q-1} \xi_m = 1 \quad (3)$$

ist.

Die Zahlen  $\xi_m$  sind invariant unter den Substitutionen der Gruppe  $\{S_1 S_2\}$ , und für jede ganze rationale Zahl  $w$  ist

$$S_1^w \xi_m = \xi_{m+w}, \quad (4)$$

und daher auch

$$S_2^w \xi_m = (S_1 S_2)^w S_1^{-w} \xi_m = S_1^{-w} \xi_m = \xi_{m-w}. \quad (5)$$

Die Grössen

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1} \quad (6)$$

sind gewiss alle voneinander verschieden. Denn nimmt man an, dass zwei von ihnen den gleichen Wert haben, so haben gemäss (4) oder (5) *alle* diesen gleichen Wert, und dieser müsste gemäss (3) gleich  $\frac{1}{q}$ , also nicht ganz sein.

Ebenso erkennt man, dass keine der Zahlen (6) in  $k^*$  liegt.

Da unter jeder Substitution  $S_1^m S_2^n$ , wo  $m$  und  $n$  zwei beliebige ganze rationale Zahlen sind, die Grössen (6) nur untereinander permutiert werden, sind die symmetrischen Grundfunktionen der Grössen (6) ganz rational, und die Grössen (6) genügen einer Gleichung vom Grade  $q$  mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Diese Gleichung ist in  $k^*$  irreduzibel, da ihre Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  — man kann für sie etwa  $\{S_1\}$  oder  $\{S_2\}$  nehmen — transitiv ist.

Der Körper  $k = k^*(\xi_0)$  ist also vom Primzahlgrade  $q$  in bezug auf den Grundkörper  $k^*$ . Ferner ist er relativ Galois'sch, d.h.

$$k = k^*(\xi_0) = k^*(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1}),$$

denn durch die Adjunktion von  $\xi_0$  zu  $k^*$  wird die Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  sicher reduziert. Aber  $\mathfrak{G}$  hat nur die Identität als eigentliche Untergruppe.

Der Körper  $K = k^*(\eta_1, \eta_2)$  hat in bezug auf  $k^*$  den Relativgrad  $q^2$ . Folglich ist  $K$  vom Relativgrad  $q$  in bezug auf  $k = k^*(\xi_0)$ . Es können also nicht beide Grössen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  in  $k$  liegen. Aus Symmetriegründen liegen daher *beide* nicht in  $k$ . (Man könnte dies übrigens auch ersehen aus dem Gleichungssystem, das sich ergibt, wenn man die Formel (2) für die Werte  $m = 0, 1, 2, \dots, q - 1$  hinschreibt.)

Daraus folgt aber sofort, dass die Erweiterung  $K$  ein Stück des Hilbert'schen Klassenkörpers von  $k$  ist. Denn die Relativedifferente  $\mathfrak{D}_{K/k}$  von  $K$  in bezug auf  $k$  ist der grösste gemeinschaftliche Teiler der Relativedifferenten aller ganzen Zahlen von  $K$  in bezug auf  $k$ . Nun gilt für  $t = 1$  und  $t = 2$ : Die Relativedifferente  $\mathfrak{D}_{K/k}(\eta_t)$  von  $K$  in bezug auf  $k$  der Zahl  $\eta_t$  ist jedenfalls gleich einem Teiler der absoluten Differenten von  $\eta_t$ , also ein Teiler von  $p_t^{p_t}$ .

Mit der Grösse  $\mathfrak{D}_{K/k}(\eta_t)$  liegt auch ihr Vielfaches  $p_i^{p_i}$  in  $\mathfrak{D}_{K/k}$ . Da also  $p_1^{p_1}$  und  $p_2^{p_2}$  im Ideal  $\mathfrak{D}_{K/k}$  liegen, ist

$$\mathfrak{D}_{K/k} = 1,$$

was zu beweisen war.

Ich möchte hier noch bemerken, dass die eben bewiesene Aussage schon enthalten ist in einem allgemeineren Satze, den ich bewiesen habe in der Arbeit: „Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers“, *Comment. Math. Helvet.*, vol. 1 (1929), pg. 160. Denn ich habe dort gezeigt, dass wenn  $U$  ein beliebiger Nicht — Ausgangskreiskörper ist, und  $K$  der kleinste Ausgangskreiskörper ist, der  $U$  enthält, die Relativdifferente von  $K$  in bezug auf  $U$  gleich 1 ist (vgl. 1.c., pg. 220).

Dass für den Grundkörper  $k^*$  *unendlich viele* Erweiterungskörper  $k$  vom Relativgrade  $q$  mit einer durch  $q$  teilbaren Klassenzahl existieren, ist evident. Denn hat man schon  $s$  solche Körper, etwa  $k_1, k_2, \dots, k_s$  — für  $s = 1$  ist dies ja der Fall — so braucht man für die Konstruktion eines weiteren Körpers  $k_{s+1}$  die beiden voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen  $p_1^{(s+1)}$  und  $p_2^{(s+1)}$  nur so zu wählen, dass sie  $\equiv 1 \pmod{q}$  und zu den Diskriminanten der Körper  $k_1, k_2, \dots, k_s$  teilerfremd sind.

Wir gehen über zum Fall  $q = 2$ .

Ist  $P$  eine Primzahl, die  $\equiv 1 \pmod{4}$  ist, oder das Produkt von lauter voneinander verschiedenen Primzahlen, die alle  $\equiv 1 \pmod{4}$  sind, so ist die (absolute) Differente der ganzen algebraischen Zahl

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{P})$$

gleich  $\sqrt{P}$ .

Sind  $p_1$  und  $p_2$  zwei voneinander verschiedene Primzahlen, die  $\equiv 1 \pmod{4}$  und zur Diskriminanten von  $k^*$  teilerfremd sind, und nimmt man an Stelle von  $\xi_0, \eta_1, \eta_2$  beziehungsweise

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p_1 p_2}), \quad \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p_1}), \quad \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p_2}),$$

so erkennt man wie oben, dass für  $K = k^*(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$  und  $k = k^*(\sqrt{p_1 p_2})$  die Relativdifferente  $\mathfrak{D}_{K/k} = 1$  ist.

Dass für den Grundkörper  $k^*$  *unendlich viele* relativquadratische Erweiterungskörper  $k$  mit gerader Klassenzahl existieren, erkennt man ebenfalls wie oben.

Denn hat man schon  $s$  solche Körper, etwa  $k_1, k_2, \dots, k_s$  — für  $s = 1$  ist dies ja der Fall — so braucht man für die Konstruktion eines weiteren Körpers  $k_{s+1}$  die beiden voneinander verschiedenen Primzahlen  $p_1^{(s+1)}$  und  $p_2^{(s+1)}$  nur so zu wählen, dass sie  $\equiv 1 \pmod{4}$  und zu den Diskriminanten der Körper  $k_1, k_2, \dots, k_s$  teilerfremd sind.

*(Reçu le 20 décembre 1972)*

Max Gut  
Glärnischstr. 14  
8704 Herrliberg ZH

**Vide-leer-empty**