Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 2. Problèmes d'existence
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

2. Problèmes d'existence

2.1. *Un problème de contrôle dans les coefficients*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ régulière. L'ensemble des contrôles est défini par [1]:

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega),\ 0 < m \leqslant v(x) \leqslant M < \infty \text{ p.p. dans } \Omega\} \tag{2.1}$$

($\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble des contrôles *ad*missibles).

Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, *l'état* $y(v)$ *du système* est défini par la solution du problème elliptique:

$$\left| \begin{aligned} & -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, v(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = f \ \textit{dans}\ \Omega, \\ & y = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma, \end{aligned} \right. \tag{2.2}$$

où f est donné par exemple dans $L^2(\Omega)$ et où les a_{ij} sont donnés avec:

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha > 0. \tag{2.3}$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

$$y(v) \in H_0^1(\Omega)\ ^{2)}. \tag{2.4}$$

La *fonction coût* est par exemple:

$$J(v) = \left(\int_\Omega |y(v) - z_d|^2\, dx\right)^{1/2}, \tag{2.5}$$

où z_d (état *d*ésiré) est donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème est alors *de minimiser* $J(v)$ *lorsque* v *parcourt* $\mathcal{U}_{ad}$.

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf. J(v)$, $v \in \mathcal{U}_{ad}$. On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est *négative* pour un problème très voisin du précédent.

---

[1]) *Toutes* les fonctions utilisées sont à *valeurs réelles.*

[2]) $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ et $H_0^1(\Omega)$ le sous espace des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels que $\varphi = 0$ sur Γ.

2.2. *Un contre exemple*

On considère le cas *unidimensionnel*

$$\Omega =]\,0,1\,[\tag{2.6}$$

$\mathcal{U}_{ad}$ étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad M = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par $y(v) = y$ solution de:

$$-\frac{d}{dx}\left(v(x)\frac{dy}{dx}\right) + vy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \tag{2.7}$$

et la fonction coût par (2.5) avec $z_d = 1 + x^2$, i.e.

$$J(v) = \left(\int_0^1 |\,y(v) - (1+x^2)\,|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

On va vérifier rapidement que:

$$\operatorname{Inf} J(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{2.9}$$

et que:

$$\text{il n'existe pas } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(u) = 0. \tag{2.10}$$

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite v_n de $\mathcal{U}_{ad}$ telle que:

$$\left|\begin{array}{l} v_n \to v_0 = 1 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile,} \\[2ex] \dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{w_0},\ w_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{6}, \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile.} \end{array}\right. \tag{2.11}$$

(Prendre $v_n(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{6}\right)^{1/2}$ si $\dfrac{m}{n} < x \leqslant \dfrac{2m+1}{2n}$,

$$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2} \text{ si } \frac{2m+1}{2n} < x \leqslant \frac{m+1}{n},$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Posons $y(v_n) = y_n$. On vérifie aussitôt que y_n est *borné* dans $H^1(\Omega)$ et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n, telle que:

$$y_n \to y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \textit{ faible.} \tag{2.12}$$

Mais l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ étant compacte, il en résulte que:

$$y_n \to y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort.} \tag{2.13}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec $v = v_n$, que:

$$\frac{d}{dx}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = v_n y_n \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

$$v_n \frac{dy_n}{dx} \to \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort,} \tag{2.14}$$

et:

$$-\frac{d}{dx}\chi_0 + v_0 y_0 = 0. \tag{2.15}$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) \to \frac{1}{w_0}\chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et comme $\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = \frac{dy_n}{dx} \to \frac{dy_0}{dx}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ faible (espace dual de $H_0^1(\Omega)$), on a donc:

$$\frac{1}{w_0}\chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

$$-\frac{d}{dx}\left[w_0 \frac{dy_0}{dx}\right] + v_0 y_0 = 0 \tag{2.16}$$

et (2.12) donne:

$$y_0(0) = 1 \ , \ y_0(1) = 2. \tag{2.17}$$

On remplace v_0 et w_0 par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent $y_0(x) = 1 + x^2$ de sorte que $J(v_n) \to 0$.

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend $v = u$): $-\dfrac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0$, d'où:

$$u = Cx^{-1/2} \exp.\left(\frac{x^2}{4}\right); \ \mathrm{C} = \text{constante}; \tag{2.18}$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans $\mathcal{U}_{ad}$.

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$, on peut se demander *pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution.* Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. *Un résultat général d'existence*

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur $\mathbf{R}$ *uniformément réflexif*, dont la norme est notée $\| \ \|$, une fonction:

$$\left|\begin{array}{l} \varphi \to M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ X \to \mathbf{R}\ , \ M(\varphi) \geqslant c > -\infty, \end{array}\right. \tag{2.19}$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$S \text{ est fermé dans } X. \tag{2.20}$$

(en particulier S *n'est pas nécessairement convexe*).

On considère alors, pour $\xi \in X$, le problème

(2.21) $$\inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

THÉORÈME 2.1. *On peut choisir ξ dans un ensemble $\mathscr{X} \subset X$, dense dans X,* [1]) *de sorte qu'alors le problème* (2.21) *admette une solution* (i.e. il existe alors $\varphi_0 \in S$) *tel que*

$$J(\varphi_0) + \| \xi - \varphi_0 \| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|].$$

Si $J = 0$, c'est un théorème dû à Edelstein [1].

2.4. *Application au problème de contrôle dans les coefficients*

Pour $\xi \in L^2(\Omega)$, on introduit (l'état $y(v)$ étant donné par (2.2)):

(2.22) $$J_\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \| v - \xi \|_{L^2(\Omega)}$$
$\varepsilon > 0$.

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend:

$$X = L^2(\Omega) \ , \ S = \mathscr{U}_{ad} \ ,$$
$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 dx \right)^{1/2} .$$

Donc: *On peut choisir ξ dans un ensemble dense de $L^2(\Omega)$ de manière qu'alors il existe $u \in \mathscr{U}_{ad}$ tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf J_\varepsilon(v) \ , \ v \in \mathscr{U}_{ad}.$$

Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les cœfficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

---

[1]) M^lle^ F. Bidaut [1] a montré qu'il existe $\mathscr{X}$ *ensemble G_δ dense* avec la propriété.