

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 2.3. Un résultat général d'existence  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Vérifions maintenant (2.10); si un tel  $u$  existait, on aurait nécessairement  $y(u) = 1 + x^2$ , d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend  $v = u$ ):

$$-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0, \text{ d'où:}$$

$$(2.18) \quad u = Cx^{-1/2} \exp. \left( \frac{x^2}{4} \right); \quad C = \text{constante};$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans  $\mathcal{U}_{ad}$ .

*Remarque 2.1.*

Si l'on prend  $J(v) = \left( \int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ , on peut se demander pour quelle classe de  $z_d$  le problème n'admet pas de solution. Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

*Remarque 2.2.*

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

*Remarque 2.3.*

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

### 2.3. Un résultat général d'existence

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach  $X$  sur  $\mathbf{R}$  uniformément réflexif, dont la norme est notée  $\| \cdot \|$ , une fonction:

$$(2.19) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi \rightarrow M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ X \rightarrow \mathbf{R}, \quad M(\varphi) \geq c > -\infty, \end{array} \right.$$

et un ensemble  $S \subset X$  avec:

$$(2.20) \quad S \text{ est fermé dans } X.$$

(en particulier  $S$  n'est pas nécessairement convexe).

On considère alors, pour  $\xi \in X$ , le problème

$$(2.21) \quad \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

THÉORÈME 2.1. *On peut choisir  $\xi$  dans un ensemble  $\mathcal{X} \subset X$ , dense dans  $X$ , <sup>1)</sup> de sorte qu'alors le problème (2.21) admette une solution (i.e. il existe alors  $\varphi_0 \in S$ ) tel que*

$$J(\varphi_0) + \|\xi - \varphi_0\| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

Si  $J = 0$ , c'est un théorème dû à Edelstein [1].

#### 2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients

Pour  $\xi \in L^2(\Omega)$ , on introduit (l'état  $y(v)$  étant donné par (2.2)) :

$$(2.22) \quad J_\varepsilon(v) = \left( \int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \|v - \xi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\varepsilon > 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend :

$$X = L^2(\Omega), \quad S = \mathcal{U}_{ad},$$

$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Donc: *On peut choisir  $\xi$  dans un ensemble dense de  $L^2(\Omega)$  de manière qu'alors il existe  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(v).$$

#### Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les coefficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

<sup>1)</sup> M<sup>lle</sup> F. Bidaut [1] a montré qu'il existe  $x$  ensemble  $G_\delta$  dense avec la propriété.