Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 3. Cas linéaire quadratique — Remarques sur le système d'optimalité
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

3. Cas linéaire quadratique — Remarques sur le système d'optimalité

3.1. *Un système hyperbolique*

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ régulière, on considère l'opérateur A défini par:

(3.1) $$A\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où les fonctions $a_i \in C^1(\overline{\Omega})$; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de x et t; nous nous bornons au cas où les a_i ne dépendent pas de t uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma \, , \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \nu_i \leqslant 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma \, , \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \nu_i \geqslant 0\}$$

où $\nu = \{\nu_i\}$ désigne la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.

On suppose que l'*état* $y = y(v) = y(x, t; v)$ du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

(3.2) $$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times \,]0, T[,$$

(3.3) $$y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times \,]0, T[,$$

(3.4) $$y(x, o) = y_0(x) \, , \, x \in \Omega$$

où f et y_0 sont donnés avec:

(3.5) $$f \in L^2(Q) \, , \, y_0 \in L^2(\Omega)$$

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

(3.6) $$\mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué.* (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût est donnée par*:

(3.7) $$J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + N \int_Q v^2 \, dx \, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0.
Le problème

(3.8) $$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

admet une solution unique (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par [1]:

(3.9) $$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_d,$$

(3.10) $$p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times \,]0, T[,$$

(3.11) $$p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

(3.12) $$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt + N \int_Q u(v - u) \, dx \, dt \geqslant 0, \ \forall \, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt = \int_Q p(v - u) \, dx \, dt$$

---

[1]) A^* est défini par $A^* \varphi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à:

(3.13) $$\int_Q (p+Nu)(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0,\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons:

(3.14) Π = opérateur de projection dans $L^2(Q)$ sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Alors (3.13) équivaut à:

(3.15) $$u = \Pi\left(-\frac{p}{N}\right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en* $\{y, p\}$:

(3.16) $$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi\left(-\frac{p}{N}\right) = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, o) = y_0(x),\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{aligned}\right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) *équivaut* au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme:

(3.17) $$v(x, t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(t)\, w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes:

(3.18) $v_i \in \mathcal{U}_{i,ad}$ = convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, $i = 1, \ldots, m$.

Supposons la fonction coût donnée alors par:

(3.19)
$$\left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + \sum_{i=1}^{m} N_i \int_0^T v^2 \, dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, ..., u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

(3.20) Π_i = opérateur de projection dans $L^2(0, T)$ sur $\mathcal{U}_{i,ad}$;

alors:

(3.21)
$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^{m} \Pi_i \left(- \frac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ - \frac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = - z_d, \\ p_i(t) = \int_\Omega p(x, t) \, w_i(x) \, dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_- , p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, o) = y_0(x) , p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

(3.22)
$$u_i = \Pi_i \left(- \frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au nº 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple*:

(3.23)
$$\mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } Q \},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+$ $(= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas:

(3.24)
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \dfrac{p^-}{N} = f, \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\[2ex] y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \, , p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] y\,(x, \mathrm{o}) = y_0\,(x)\, , p\,(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \dfrac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

(3.25)
$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2\,(Q)\, , \alpha\,(x, t) \leqslant v\,(x, t) \leqslant \beta\,(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{array}\right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]). On désigne par $\{y_i, p_i\}$ $(i = 1, 2)$ la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

(3.26)
$$f_1 \leqslant f_2 \, , y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}$$

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors:

$$p_1 \leqslant p_2 \text{ (et donc } u_1 \geqslant u_2) \text{ p.p. dans } Q. \tag{3.27}$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi\left(-\dfrac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\dfrac{p_2}{N}\right)\right) = f_1 - f_2, \\[2ex] -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\[2ex] z = 0 \textit{ sur } \Sigma_- , q = 0 \textit{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] z(x, \text{o}) = y_{01}(x) - y_{02}(x) , q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.28}$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi\psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi \, dx$. On multiplie la 1re équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q. Il vient:

$$\left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(\text{o})) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q \tag{3.29}$$

où

$$X = -\left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q . \tag{3.30}$$

Utilisant la 2e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\dfrac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\text{o})), \tag{3.31}$$

d'où, *comme* Λ *est un opérateur différentiel du* 1er *ordre*

$$| \Lambda q^+ |_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\text{o})). \tag{3.32}$$

Si l'on pose $-\dfrac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$(3.33)\qquad \left| \begin{aligned} X &= -N\big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\,,(\varphi_1 - \varphi_2)^-\big)_Q \\ &= N\int_Q \big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\big)(\varphi_1 - \varphi_2)\,dx\,dt \\ &\varphi_1 \leqslant \varphi_2. \end{aligned} \right.$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$(3.34)\qquad X \geqslant 0.$$

D'après (3.26), le 2[e] membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$\Lambda q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. *Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati*

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$(3.35)\qquad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$(3.36)\qquad \left| \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-\,,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, \mathrm{o}) = y_0(x)\,,\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega; \end{aligned} \right.$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$:

(3.37)
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A\,\varphi + \dfrac{1}{N}\psi = 0, \\[2ex] -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + A^*\psi - \varphi = 0, \\[2ex] \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_- X\,]s,T[\,,\ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ X\,]s,T[\\[2ex] \varphi(x,s) = h(x)\,,\ \psi(x,T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{array}\right.$$

qui admet une solution unique; en fait il s'agit là du système d'optimalité pour le problème suivant: l'état est donné par $\bar{y}(v)$ solution de:

(3.38)
$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} = v\,,\ \bar{y}(s) = h\,,\ t > s$$

et la fonction coût par:

(3.39)
$$\int_s^T |\,\bar{y}(v)\,|^2\,dt + N\int_s^T |\,v\,|^2\,dt = \mathscr{J}_s^h(v)$$

(où $|\,v\,|^2 = \int_\Omega v(x)^2\,dx$), et on minimise $\mathscr{J}_s^h(v)$ sans contraintes.

Donc le système (3.37) admet une solution unique, donc définit de manière unique $\psi(s) \in L^2(\Omega)$.

L'application $h \to \psi(s)$ est linéaire continu de $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, donc:

(3.40)
$$\psi(s) = P(s)\,h\,,\ P(s) \in \mathscr{L}(H;H)\,,\ H = L^2(\Omega).$$

On vérifie alors que l'on a l'identité (Cf. Lions, loc. cit.)

(3.41)
$$p(t) = P(t)\,y(t) + r(t).$$

On peut calculer P et r par un *calcul d'identification* (il faut vérifier que les calculs effectués ci-après de façon formelle sont loisibles). On obtient, (en posant de manière générale $\dfrac{dg}{dt} = g'$),

(3.42)
$$-P'y - Py' - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d,$$

et en remplaçant dans (3.42) y' par sa valeur tirée de la première équation (3.36), on a finalement:

(3.43)
$$-P'y + P\left(Ay + \frac{p}{N} - f\right) - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d.$$

On peut encore remplacer dans (3.43) p par sa valeur (3.41), d'où:

$$- P'y + PAy + A^* Py + \frac{1}{N} PPy - y - r' + A^* r + \frac{1}{N} Pr - Pf = - z_d$$

et cela est une identité en y, d'où:

$$(3.44) \qquad - \frac{\partial P}{\partial t} + PA + A^* P + \frac{1}{N} P \circ P = I$$

et

$$(3.45) \qquad - \frac{\partial r}{\partial t} + A^* r + \frac{1}{N} Pr = Pf - z_d.$$

Comme $p(T) = 0$, on doit avoir:

$$(3.46) \qquad P(T) = 0 \, , \, r(T) = 0.$$

On vérifie enfin à partir de (3.37) que:

$$(3.47) \qquad P(t)^* = P(t) \text{ dans } \mathscr{L}(H; H)$$

et que

$$(3.48) \qquad P(t) \geqslant 0 \text{ dans } \mathscr{L}(H; H).$$

Plus précisément, on vérifie que:

$$(3.49) \qquad (P(s)\, h, h) = \inf_v \mathscr{J}_s^h(v).$$

On note encore que:

$$(3.50) \qquad P(t)\, h \in D(A^*) \, , \, r(t) \in D(A^*).$$

D'après le théorème des noyaux de L. Schwartz [1], on peut représenter (de façon unique), l'opérateur $P(t)$ par un *noyau* $P(x, \xi, t)$ et on peut résumer les informations ci-dessus dans l'ensemble des conditions suivantes:

$$(3.51) \quad \left| \begin{array}{l} - \dfrac{\partial P}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x) P(x, \xi, t)) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}(a_i(\xi) P(x, \xi, t)) \\[2ex] + \dfrac{1}{N} \displaystyle\int_\Omega P(x, \xi, t) P(\xi, \xi, t)\, d\xi = \delta(x - \xi) \text{ dans } \Omega \times \Omega \times \,]0, \, T[, \\[2ex] P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \end{array} \right.$$

$$\left|\begin{array}{l} P(x,\xi,t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+ \,,\ \xi \in \Omega \,,\ t \in]0,T[, \\ P(x,\xi,T) = 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega, \\ \forall\, h \in L^2(\Omega) \,,\ \int_\Omega P(x,\xi,t)\, h(\xi)\, d\xi \in L^2(\Omega) \text{ et} \\ \iint_{\Omega\times\Omega} P(x,\xi,t)\, h(x)\, h(\xi)\, dx d\xi \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Ce problème admet une solution unique. La fonction $r = r(x,t)$ est ensuite déterminée par:

$$(3.52)\quad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial r}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)\, r(x,t)) + \dfrac{1}{N}\int_\Omega P(x,\xi,t)\, r(\xi)\, d\xi \\ = \int_\Omega P(x,\xi,t) f(\xi,t)\, d\xi - z_d(x,t), \\ r(x,t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+ \,,\ t \in]0,T[, \\ r(x,T) = 0. \end{array}\right.$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.2. *La solution $P(x,\xi,t)$ de* (3.51) *vérifie :*

$$(3.53)\qquad P(x,\xi,t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \Omega.$$

Démonstration

Considérons le système (3.37) avec h donnée $\geqslant 0$ p.p. dans Ω.

On aura (3.53) si l'on montre que $\psi \geqslant 0$ p.p. dans $\Omega \times]s,T[$. Pour cela, on multiplie la 1re équation (3.37) par ψ^-, il vient:

$$\int_{\Omega\times]s,T[} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi\right)\psi^-\, dx\, dt - \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\, dx\, dt = 0;$$

intégrant par parties et posant $\Lambda = -\dfrac{\partial}{\partial t} + A^*$, il vient:

$$-\int_\Omega h(x)\,\psi^-(x,s)\, dx + \int_{\Omega\times]s,T[} \varphi(\Lambda\psi^-)\, dx\, dt - \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\, dxdt = 0$$

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_{\Omega} h(x)\,\psi^{-}(x,s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^{-})\,dx\,dt$$

$$- \frac{1}{N}\int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^{-})^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$\int_{\Omega} h(x)\,\psi^{-}(x,s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi^{-})^2\,dx\,dt + \frac{1}{N}\int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^{-})^2\,dx\,dt = 0. \tag{3.54}$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^{-} = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre $N : P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0, T]\,,\ \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t)\, h(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.