

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 3.2. Système d'optimalité
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 20.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0 .

Le problème

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \inf J(v) \\ & v \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

admet une *solution unique* (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par ¹⁾:

$$(3.9) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le *contrôle* u est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

¹⁾ A^* est défini par $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à :

$$(3.13) \quad \int_Q (p + Nu) (v - u) \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons :

$$(3.14) \quad \Pi = \text{opérateur de projection dans } L^2(Q) \text{ sur } \mathcal{U}_{ad}.$$

Alors (3.13) équivaut à :

$$(3.15) \quad u = \Pi \left(-\frac{p}{N} \right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en $\{y, p\}$:*

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi \left(-\frac{p}{N} \right) = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) équivaut au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme :

$$(3.17) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes :

$$(3.18) \quad v_i \in \mathcal{U}_{i, ad} = \text{convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \quad i = 1, \dots, m.$$

Supposons la fonction coût donnée alors par :

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + \sum_{i=1}^m N_i \int_0^T v^2 dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

$$(3.20) \quad \Pi_i = \text{opérateur de projection dans } L^2(0, T) \text{ sur } \mathcal{U}_{i,ad};$$

alors :

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^m \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ p_i(t) = \int_{\Omega} p(x, t) w_i(x) dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(3.22) \quad u_i = \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple* :

$$(3.23) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \geq 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+ (= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas :

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ \\ - \frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant nul dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou frontière, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites non homogènes telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés*¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, \quad y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].