Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 3.2. Système d'optimalité

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

(3.6) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué.* (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût est donnée par*:

(3.7) $$J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + N \int_Q v^2 \, dx \, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0.

Le problème

(3.8) $$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

admet une solution unique (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par [1]):

(3.9) $$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_d,$$

(3.10) $$p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times \,]0, T[,$$

(3.11) $$p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

(3.12) $$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt + N \int_Q u (v - u) \, dx \, dt \geqslant 0, \ \forall \, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt = \int_Q p (v - u) \, dx \, dt$$

---

[1]) A^* est défini par $A^* \varphi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à:

(3.13) $$\int_Q (p+Nu)(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0,\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons:

(3.14) Π = opérateur de projection dans $L^2(Q)$ sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Alors (3.13) équivaut à:

(3.15) $$u = \Pi\left(-\frac{p}{N}\right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en* $\{y, p\}$:

(3.16) $$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi\left(-\frac{p}{N}\right) = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, o) = y_0(x),\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{aligned}\right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) *équivaut* au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme:

(3.17) $$v(x, t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(t)\, w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes:

(3.18) $v_i \in \mathcal{U}_{i,ad}$ = convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, $i = 1, ..., m$.

Supposons la fonction coût donnée alors par:

(3.19)
$$\left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + \sum_{i=1}^{m} N_i \int_0^T v^2 \, dt, \\ \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

(3.20) Π_i = opérateur de projection dans $L^2(0, T)$ sur $\mathcal{U}_{i,ad}$;

alors:

(3.21)
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^{m} \Pi_i\left(-\dfrac{p_i}{N_i}\right) w_i = f, \\ \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = - z_d, \\ \\ p_i(t) = \int_\Omega p(x, t) \, w_i(x) \, dx, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_- , \; p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, o) = y_0(x) , \; p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

(3.22)
$$u_i = \Pi_i\left(-\frac{p_i}{N_i}\right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple*:

(3.23)
$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+$ $(= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas:

$$(3.24) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \dfrac{p^-}{N} = f, \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = z_d, \\[2ex] y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \, , p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] y(x, o) = y_0(x) \, , p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \dfrac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

$$(3.25) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q) \, , \alpha(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]). On désigne par $\{y_i, p_i\}$ $(i = 1, 2)$ la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

$$(3.26) \qquad f_1 \leqslant f_2 \, , y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}$$

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].