

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 3.3. Propriétés de comparaison  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ \\ - \frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance (puisque  $u = \frac{p^-}{N}$ ) de la « surface de commutation » séparant la région où  $p > 0$  de celle où  $p < 0$ , le contrôle  $u$  étant nul dans la 1<sup>re</sup> région.

*Remarque 3.5.*

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou frontière, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites non homogènes telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

### 3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que  $\mathcal{U}_{ad}$  est donné par :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques} \}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que  $z_d$  et  $N$  sont *fixés*<sup>1)</sup>. On désigne par  $\{y_i, p_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) la solution de (3.24) correspondant à  $f = f_i, y_0 = y_{0i}$ . On a alors le :

**THÉORÈME 3.1.** *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, \quad y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

<sup>1)</sup> On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors :

$$(3.27) \quad p_1 \leq p_2 \text{ (et donc } u_1 \geq u_2) \text{ p.p. dans } Q.$$

*Démonstration*

Posons:  $z = y_1 - y_2$ ,  $q = p_1 - p_2$ . On déduit de (3.16) que:

$$(3.28) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left( \Pi \left( -\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left( -\frac{p_2}{N} \right) \right) = f_1 - f_2, \\ & -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\ & z = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad q = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ & z(x, 0) = y_{01}(x) - y_{02}(x), \quad q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \right\}$$

On pose  $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi \psi \, dx \, dt$ ,  $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi \, dx$ . On multiplie la 1<sup>re</sup> équation (3.28) par  $q^+$  et l'on intègre sur  $Q$ . Il vient:

$$(3.29) \quad \left( z, \left( -\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(0)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

$$(3.30) \quad X = - \left( \Pi \left( -\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left( -\frac{p_2}{N} \right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q.$$

Utilisant la 2<sup>e</sup> équation (3.28) et posant  $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$ , on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(3.31) \quad (\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)),$$

d'où, comme  $\Lambda$  est un opérateur différentiel du 1<sup>er</sup> ordre

$$(3.32) \quad |\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)).$$

Si l'on pose  $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$ , on a:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^-)_Q \\
 &= N \int_Q (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leq \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que  $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$  p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geq 0.$$

D'après (3.26), le 2<sup>e</sup> membre de (3.32) est  $\leq 0$ , ce qui, avec (3.34) donne:

$$\wedge q^+ = 0.$$

Comme  $q^+ = 0$  sur  $\Sigma_+$  et  $q^+(x, T) = 0$ , on a  $q^+ = 0$  d'où (3.27).

### 3.4. Cas sans contrainte – Equation intégro-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « sans contraintes », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} &= f, \\
 -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y &= -z_d, \\
 y &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 y(x, 0) &= y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour  $t = 0$  et  $t = T$ . Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour  $s < t < T$  où  $s$  est fixé (quelconque) dans  $]0, T[$ :