$$(3.24)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \dfrac{p^-}{N} = f, \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\[2ex] y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \,, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] y(x, o) = y_0(x) \,, p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \dfrac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

$$(3.25)\quad \left|\begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \,|\, v \in L^2(Q) \,,\, \alpha(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant \beta(x,t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{array}\right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

$$(3.26)\qquad f_1 \leqslant f_2 \,,\, y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}$$

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors:

(3.27) $$p_1 \leqslant p_2 \text{ (et donc } u_1 \geqslant u_2) \text{ p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

(3.28)
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi\left(-\dfrac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\dfrac{p_2}{N}\right)\right) = f_1 - f_2, \\[2ex] -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\[2ex] z = 0 \textit{ sur } \Sigma_-\,, q = 0 \textit{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] z(x, \mathrm{o}) = y_{01}(x) - y_{02}(x)\,,\, q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi\psi\, dx\, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx$. On multiplie la 1[re] équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q. Il vient:

(3.29) $$\left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right) q^+\right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

(3.30) $$X = -\left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right), (p_1 - p_2)^+\right)_Q.$$

Utilisant la 2[e] équation (3.28) et posant $\Lambda = -\dfrac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

(3.31) $$(\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})),$$

d'où, *comme* Λ *est un opérateur différentiel du* 1[er] *ordre*

(3.32) $$|\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})).$$

Si l'on pose $-\dfrac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$(3.33)\quad \left| \begin{aligned} X &= -N\left(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\,,(\varphi_1 - \varphi_2)^-\right)_Q \\ &= N\int_Q \left(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\right)(\varphi_1 - \varphi_2)\,dx\,dt \\ &\varphi_1 \leqslant \varphi_2. \end{aligned} \right.$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$(3.34)\qquad X \geqslant 0.$$

D'après (3.26), le 2[e] membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$\Lambda q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. *Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati*

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$(3.35)\qquad \mathscr{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$(3.36)\quad \left| \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-\,,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, \mathrm{o}) = y_0(x)\,,\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega; \end{aligned} \right.$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$: