Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: Remarque 4.3.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

4.2. *Cas non différentiable*

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v \;, \; x \in]0,1[\;, \; t \in]0,T[, \tag{4.12}$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(Q), \text{ contenu dans} \\ \text{les fonctions p.p.} \geqslant 0 \text{ dans } Q. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geqslant 0$ donné; alors c étant une constante > 0,

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=0}, \; \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=1}. \tag{4.14}$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$\operatorname{Inf} J(v) \;, \; v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad} \tag{4.15}$$

admet encore une solution (au moins), soit u.

Mais la fonction $\lambda \to \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \to y(v)$ de $L^2(Q) \to L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \to \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = -c\,\gamma(y(\mathrm{o},t) - h), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial x}(1, t) = \quad c\,\gamma(y(1,t) - h). \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Soit $y^{\gamma}(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^{\gamma}(v) \to y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^{\gamma}(v)$, la fonction $v \to y^{\gamma}(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt \tag{4.17}$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. Phénomènes de perturbations singulières

5.1. *Orientations*

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε, soit $y_{\varepsilon}(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_{\varepsilon}(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « *corrections* »