

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION
Autor: Hausmann, Jean-Claude
Kapitel: 2. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES ACTIONS DE GROUPE ET LES GRAPHES
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51750>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

agit sur un arbre avec un élément qui agit sans sommet fixe admet une structure bipolaire. Or un produit amalgamé non-trivial ou une *HNN*-extension agit toujours sur un arbre de cette façon par la réciproque du théorème de Bass-Serre cité plus haut. L'autre direction s'obtient par un usage de nos critères.

Les résultats présentés ici constitueront quelques chapitres d'un cours de 2^e cycle donné par l'auteur à l'université de Genève pendant l'année académique 1979-1980. Je tiens à remercier P. de la Harpe pour de très utiles conversations.

2. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES ACTIONS DE GROUPES ET LES GRAPHS

(2.1) Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . Sauf mention du contraire, une telle action est toujours à gauche. L'ensemble des orbites est noté $G \backslash X$. Pour $x \in X$, on définit comme de coutume le *groupe d'isotropie* G_x de x :

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

et on dit que l'action est *libre* si $G_x = \{ 1 \}$ pour tout $x \in X$. Un sous-ensemble de X qui contient exactement un représentant par orbite est appelé un *ensemble de représentants* pour l'action de G sur X .

(2.2) Un *graphe* Γ est une paire d'ensembles $(\text{Som } \Gamma, \text{Ar } \Gamma)$, appelés l'ensemble des *sommets* et l'ensemble des *arêtes* de Γ , munis de deux applications $o, e : \text{Ar } \Gamma \rightarrow \text{Som } \Gamma$ (*origine* et *extrémité*). Comme d'habitude, on rend compte de cette donnée par un dessin où une arête a est un arc orienté allant de $o(a)$ à $e(a)$; ce dessin correspond à la réalisation géométrique du graphe qui est un *CW-complexe* de dimension 1.

Une action d'un groupe G sur un graphe Γ est une action de G sur $\text{Som } \Gamma$ et sur $\text{Ar } \Gamma$ telle que

$$o(ga) = go(a) \quad \text{et} \quad e(ga) = ge(a)$$

pour tout $a \in \text{Ar } \Gamma$ et tout $g \in G$. Les applications o et e passent alors aux quotients $G \backslash \text{Som } \Gamma$ et $G \backslash \text{Ar } \Gamma$ ce qui donne un *graphe quotient* $G \backslash \Gamma$.

(2.3) *Chemins dans un graphe*. On appelle CH_n tout graphe satisfaisant à :

$$\begin{aligned} \text{Som } CH_n &= \{ 0, 1, 2, \dots, n \} \\ \text{Ar } CH_n &= \{ [0, 1], [1, 2], \dots, [n-1, n] \} \\ \{ o([k-1, k]), e([k-1, k]) \} &= \{ k-1, k \} \end{aligned}$$



FIG. 1. — Deux graphes de type CH_4

Un chemin (de longueur n) dans un graphe Γ est un morphisme de graphe $c : CH_n \rightarrow \Gamma$. Si a et $b \in \text{Som } \Gamma$ sont dans l'image de $\text{Som } CH_n$ par c , on dit que le chemin c relie a à b . Cette notion de chemin définit celle de *connexité* et de *composante connexe* d'un graphe.

Le lecteur aura remarqué la non-unicité du modèle CH_n , qui provient bien entendu de ce que nous travaillons dans la catégorie des graphes orientés. On peut contourner cette difficulté technique en doublant formellement chaque arête, comme dans [Se]. Mais cela rendrait d'autres points plus compliqués et notre solution, malgré cette petite imperfection formelle, nous a paru permettre une exposition plus légère.

(2.4) Si U et V sont deux sous-ensembles de $\text{Som } \Gamma$, la *distance* $d(U, V)$ entre U et V est l'entier positif ou nul défini comme le minimum des longueurs de chemins reliant un point de U à un point de V . Pour $u, v \in \text{Som } \Gamma$, on usera des allègements de notation :

$$d(u, V) = d(\{u\}, V) \quad \text{et} \quad d(u, v) = d(\{u\}, \{v\}).$$

(2.4) PROPOSITION. Soit G un groupe agissant sur un graphe connexe Γ , et soit $U \subset \text{Som } \Gamma$ un ensemble de représentants pour l'action de G sur $\text{Som } \Gamma$. Soit $u \in U$. Alors G est engendré par $G_u \cup R_U$, où R_U est défini par :

$$R_U = \{ r \in G \mid \text{il existe } a \in \text{Ar } \Gamma \text{ telle que } o(a) \in U \\ \text{et } e(a) \in rU \}$$

Démonstration. Soit H le sous-groupe de G engendré par $G_u \cup R_U$. Soit $g \in G$. On va démontrer que $g \in H$ par récurrence sur la distance $d(U, gu)$. Si $d(U, gu) = 0$, cela signifie que $gu \in U$. Comme U est un ensemble de représentants, cela n'est possible que si $gu = u$, auquel cas $g \in G_u \subset H$.

Prenons donc comme hypothèse de récurrence que $h \in H$ pour tout $h \in G$ tel que $d(U, hu) \leq d$. Soit $g \in G$ satisfaisant à $d(U, gu) = d + 1$. Soit $c : CH_{d+1} \rightarrow \Gamma$ un chemin reliant $v \in U$ à gu . On a alors $c(\{0, 1\}) = \{v, x\}$, avec $x \notin U$. Soient $r \in G$ et $p \in U$ tels que $x = rp$, et dénotons par a l'arête $c([0, 1]) \in \text{Ar } \Gamma$.

Supposons que $e(a) = x$. Par hypothèse, on a alors $r \in R_U$. Le chemin $c' : CH_a \rightarrow \Gamma$ défini par $c'(k) = r^{-1}c(k+1)$ sur les sommets et

$$c'([k, k+1]) = c([k+1, k+2])$$

sur les arêtes relie $p \in U$ à $r^{-1}gu$. On en déduit par l'hypothèse de récurrence que $r^{-1}g \in H$, d'où $g \in H$.

Dans le cas où $o(a) = x$, on a alors $r^{-1} \in R_U$ puisque $o(r^{-1}a) = p$ et $e(r^{-1}a) = r^{-1}p$. Le même raisonnement que précédemment montre que $rg \in H$, d'où $g \in H$. ■

(2.5) *Arbres.* Un *arbre* Γ est un graphe connexe tel que pour toute arête a de Γ , le sous-graphe maximal Γ_a de Γ qui ne contient pas l'arête a est non-connexe. On vérifie alors que Γ_a est formé de deux composantes connexes, l'une contenant $o(a)$ et l'autre contenant $e(a)$. Nous appellerons $\mathcal{B}(a)$ la composante connexe de Γ_a qui contient $e(a)$ (« branches de a ») et $\mathcal{R}(a)$ (« racines de a ») celle où se trouve $o(a)$. (L'arête a est momentanément pressentie comme étant le « tronc » de l'arbre). Les sous-graphes $\mathcal{B}(a)$ et $\mathcal{R}(a)$ sont des sous-arbres de Γ . Si g est un automorphisme de Γ , on a $g\mathcal{B}(a) = \mathcal{B}(ga)$ et $g\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(ga)$.

Notre définition d'un arbre est évidemment équivalente à celle plus courante d'un graphe sans circuit ou d'un graphe dont la réalisation géométrique est contractile.

(2.6) *Chaînes infinies.* On définit les graphes CH_∞ de la même manière que CH_n , sauf que $\text{Som } CH_\infty = \mathbf{Z}$. Une *chaîne infinie* d'un graphe Γ est un morphisme $c : CH_\infty \rightarrow \Gamma$ qui est injectif sur les ensembles de sommets et d'arêtes (condition qui n'est pas requise dans la définition d'un chemin).

(2.7) Si G est un groupe qui agit sur un graphe connexe Γ , on peut toujours trouver un ensemble de représentants de l'action de G sur $\text{Som } \Gamma$ qui soit l'ensemble des sommets d'un sous-arbre A de Γ . C'est un relevé d'un arbre maximal de $G \backslash \Gamma$. Pour une démonstration de ces faits, voir [Se, § 3]. L'arbre A s'appelle un *arbre de représentants*, mais nous attirons l'attention du lecteur que $\text{Ar } A$ n'est pas un ensemble de représentants pour l'action de G sur $\text{Ar } \Gamma$.