

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION
Autor: Hausmann, Jean-Claude
Kapitel: 4. Critères pour produits amalgamés
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51750>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On en déduit que g et h translatent avec amplitude 2 des chaînes C_g et respectivement C_h , et $C_g \cap C_h$ contient l'arête a ainsi que sa transformée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que g^2 et h^2 engendrent un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Observons que le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par g et h^2 n'est pas libre, comme en témoigne la relation $(gh^{-2})^4 = 1$. Ceci montre que l'hypothèse $rk_g > q < sk_h$ de (3.5) est essentielle.

4. CRITÈRES POUR PRODUITS AMALGAMÉS

Soit B_i , $i \in J$, une famille de sous-groupes d'un groupe G et soit F un sous-groupe de $\bigcap_{i \in J} B_i$. Les inclusions $B_i \subset G$ s'étendent en un unique homomorphisme $\Psi: *_F B_i \rightarrow G$, où $*_F B_i$ dénote le produit de tous les B_i amalgamé sur F .

(4.1) PROPOSITION. Soient B_i , G et F comme ci-dessus. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X et qu'il existe une famille L_i ($i \in J$) de sous-ensembles de X et un élément $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$ tels que :

- 1) $F \subset G_d$
- 2) $(B_i - F)(L_j \cup \{d\}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$.

Alors, l'homomorphisme $\Psi: *_F B_i \rightarrow G$ induits par les inclusions $B_i \subset G$ est injectif.

Démonstration. Tout élément $g \in *_F B_i$ peut s'écrire $g = g_1 f$ avec $f \in F$ et $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$, où les B_k sont des éléments de $B_{i(k)} - F$, avec $i(k) \in J$ et $i(k) \neq i(k+1)$. Si $\Psi(g) = 1$ et $g \neq 1$, cela entraîne que $g_1 \neq 1$, puisque $\Psi|_F$ est injectif. Mais alors, si $g_1 \neq 1$, nos hypothèses font que $\Psi(g) d \in L_{i(n)}$. Comme $d \notin L_{i(n)}$, cela montre que $\Psi(g) \neq 1$, d'où Ψ est injectif. ■

(4.2) Remarques. 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en: $X_i(L_j \cup \{d\}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$, où X_i est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de B_i modulo F .

- 2) Le cas $F = 1$ redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].

(4.3) COROLLAIRE. Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ . Soit $a \in \text{Ar } \Gamma$ avec $o(a) = u$ et $e(a) = v$. Alors, l'homomorphisme $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \rightarrow G$ induit par les inclusions dans G des groupes d'isotropie de u, v et a est injectif.

Démonstration. Soit $\dot{\Gamma}$ le premier subdivisé barycentrique de Γ . Rappelons que le graphe $\dot{\Gamma}$ peut être défini par :

$$\text{Som } \dot{\Gamma} = \text{Som } \Gamma \cup \text{Ar } \Gamma$$

$$\text{Ar } \dot{\Gamma} = \{ (x, b) \in \text{Som } \Gamma \times \text{Ar } \Gamma \mid o(b) = x \}$$

$$\cup \{ (b, x) \in \text{Ar } \Gamma \times \text{Som } \Gamma \mid e(b) = x \}$$

avec

$$o(x, b) = x, \quad e(x, b) = b,$$

$$o(b, x) = b \quad \text{et} \quad e(b, x) = x.$$

Le graphe $\dot{\Gamma}$ est un arbre si et seulement si Γ en est un.

Le corollaire (4.3) se déduit par application du critère (4.1) à la situation :

$$X = \text{Som } \dot{\Gamma}, \quad B_1 = G_u, \quad B_2 = G_v, \quad F = G_a = G_{(u,a)} = G_{(a,v)}$$

$$L_1 = \text{Som } \mathcal{R}(u, a), \quad L_2 = \text{Som } \mathcal{B}(a, v), \quad d = a \in \text{Som } \dot{\Gamma}$$

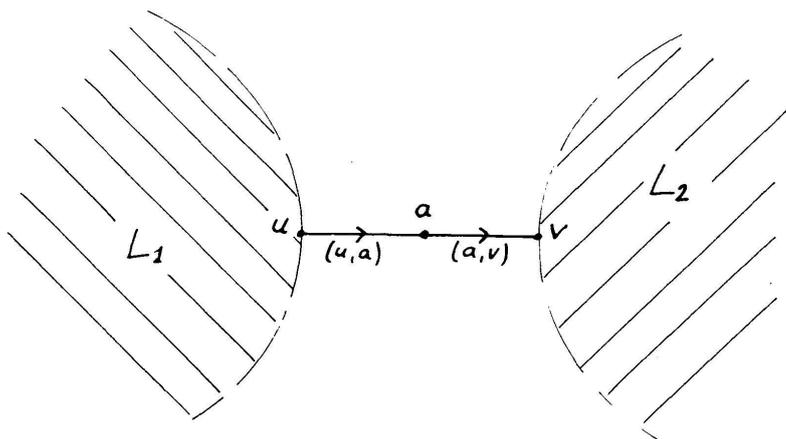


FIG. 7.

(4.4) COROLLAIRE. (Bass-Serre, [Se, § 4]). Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ de manière que le graphe quotient $G \backslash \Gamma$ soit un segment (arbre comportant une seule arête). Soit $a \in \text{Ar } \Gamma$, avec $o(a) = u$ et $e(a) = v$. Alors, l'homomorphisme $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \rightarrow G$ induit par les inclusions est un isomorphisme.

Démonstration. L'homomorphisme Ψ est injectif par (4.3). Pour démontrer la surjectivité de Ψ , on observe que l'arête a se projette sur l'unique arête \bar{a} de $G \setminus \Gamma$, ce qui entraîne que $B = \{u, v\}$ est un ensemble de représentants pour l'action de G sur $\text{Som } \Gamma$. La proposition (2.4) assure alors que G est engendré par $G_u \cup R_B$, avec $R_B = \{r \in G \mid \text{il existe } s_r \in \text{Ar } \Gamma \text{ telle que } o(s_r) \in B \text{ et } e(s_r) \in rB\}$. Soit $r \in R_B$. Comme toutes les arêtes de Γ sont dans l'orbite de a , il existe $h_r \in G$ tel que $s_r = h_r a$. De plus, $o(s_r) = o(a) = u$, d'où $h_r \in G_u$. Donc $e(s_r) = rv = h_r v$, d'où $h_r^{-1} r \in G_v$. On en déduit que G est engendré par $G_u \cup G_v$, d'où la surjectivité de Ψ . ■

5. CRITÈRE POUR LES *HNN*-EXTENSIONS

Soit F un sous-groupe d'un groupe H . Soit $\phi: F \rightarrow H$ un homomorphisme injectif (un autre plongement de F dans H). Désignons par $\langle z \rangle$ le groupe cyclique infini de générateur z . Rappelons que l'on définit le groupe *HNN* (H, F, ϕ) comme le quotient du produit libre $H * \langle z \rangle$ par la clôture normale des éléments $z^{-1} f z \phi(f)^{-1}$ pour $f \in F$. On dit que le groupe $H^* = \text{HNN}(H, F, \phi)$ est obtenu de H, F et ϕ par la *construction HNN*. Le groupe H s'appelle la *base* de H^* , z s'appelle la *lettre stable* et F et $\phi(F)$ sont les *sous-groupes associés* [L-S, Chap. IV, § 2]. Nous allons démontrer le critère suivant pour reconnaître une *HNN*-extension dans un groupe :

(5.1) THÉORÈME Soit G un groupe, $F \subset H \subset G$ des sous-groupes de G et $z \in G$ tel que $z^{-1} F z \subset H$. Désignons par $\phi: F \rightarrow H$ l'homomorphisme $\phi(f) = z^{-1} f z$. On suppose que G agit sur un ensemble X et qu'il existe des sous-ensembles L_F et L_ϕ de X ainsi qu'un élément $d \in X - (L_F \cup L_\phi)$ satisfaisant aux conditions suivantes: (notation: $\bar{L}_F = L_F \cup \{d\}$, $\bar{L}_\phi = L_\phi \cup \{d\}$)

- 1) $F \subset G_d$
- 2) $(H - F) \bar{L}_\phi \subset L_F$
- 3) $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$
- 4) $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$ et $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$
- 5) $z(L_F - z^{-1} \bar{L}_F) \subset L_\phi$ et $z^{-1}(L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$
- 6) $(H - F) \bar{L}_\phi \cap z^{-1} \bar{L}_F = \emptyset$ et $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \cap z \bar{L}_\phi = \emptyset$

Alors, l'homomorphisme $\Psi: \text{HNN}(H, F, \phi) \rightarrow G$ induit par les inclusions (avec z comme lettre stable) est injectif.