Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION
Autor: Hausmann, Jean-Claude
Kapitel: 4. Critères pour produits amalgamés
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51750

On en déduit que g et h translatent avec amplitude 2 des chaînes C_g et respectivement C_h, et $C_g \cap C_h$ contient l'arête a ainsi que sa transformée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que g^2 et h^2 engendrent un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Observons que le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par g et h^2 n'est pas libre, comme en témoigne la relation $(gh^{-2})^4 = 1$. Ceci montre que l'hypothèse $rk_g > q < sk_h$ de (3.5) est essentielle.

4. Critères pour produits amalgamés

Soit B_i, $i \in J$, une famille de sous-groupes d'un groupe G et soit F un sous-groupe de $\bigcap_{i \in J} B_i$. Les inclusions $B_i \subset G$ s'étendent en un unique homomorphisme $\Psi: *_F B_i \to G$, où $*_F B_i$ dénote le produit de tous les B_i amalgamé sur F.

(4.1) Proposition. *Soient B_i, G et F comme ci-dessus. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X et qu'il existe une famille L_i $(i \in J)$ de sous-ensembles de X et un élément $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$ tels que:*

1) $F \subset G_d$

2) $(B_i - F)(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$.

Alors, l'homomorphisme $\Psi: *_F B_i \to G$ induits par les inclusions $B_i \subset G$ est injectif.

Démonstration. Tout élément $g \in *_F B_i$ peut s'écrire $g = g_1 f$ avec $f \in F$ et $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$, où les B_k sont des éléments de $B_{i(k)} - F$, avec $i(k) \in J$ et $i(k) \neq i(k+1)$. Si $\Psi(g) = 1$ et $g \neq 1$, cela entraîne que $g_1 \neq 1$, puisque $\Psi \mid F$ est injectif. Mais alors, si $g_1 \neq 1$, nos hypothèses font que $\Psi(g)\, d \in L_{i(n)}$. Comme $d \notin L_{i(n)}$, cela montre que $\Psi(g) \neq 1$, d'où Ψ est injectif. ■

(4.2) *Remarques.* 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en: $X_i(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout i, $j \in J$ avec $i \neq j$, où X_i est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de B_i modulo F.

2) Le cas $F = 1$ redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].

(4.3) COROLLAIRE. *Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ. Soit $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$ avec $o(a) = u$ et $e(a) = v$. Alors, l'homomorphisme $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \to G$ induit par les inclusions dans G des groupes d'isotropie de u, v et a est injectif.*

Démonstration. Soit $\dot{\Gamma}$ le premier subdivisé barycentrique de Γ. Rappelons que le graphe $\dot{\Gamma}$ peut être défini par:

$$\begin{aligned}\mathrm{Som}\,\dot{\Gamma} &= \mathrm{Som}\,\Gamma \cup \mathrm{Ar}\,\Gamma \\ \mathrm{Ar}\,\dot{\Gamma} &= \{(x, b) \in \mathrm{Som}\,\Gamma \times \mathrm{Ar}\,\Gamma \mid o(b) = x\} \\ &\quad \cup \{(b, x) \in \mathrm{Ar}\,\Gamma \times \mathrm{Som}\,\Gamma \mid e(b) = x\}\end{aligned}$$

avec

$$o(x, b) = x, \quad e(x, b) = b,$$
$$o(b, x) = b \quad \text{et} \quad e(b, x) = x.$$

Le graphe $\dot{\Gamma}$ est un arbre si et seulement si Γ en est un.

Le corollaire (4.3) se déduit par application du critère (4.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\,\dot{\Gamma}, \quad B_1 = G_u, \quad B_2 = G_v, \quad F = G_a = G_{(u,a)} = G_{(a,v)}$$
$$L_1 = \mathrm{Som}\,\mathscr{R}(u, a), \quad L_2 = \mathrm{Som}\,\mathscr{B}(a, v), \quad d = a \in \mathrm{Som}\,\dot{\Gamma}$$

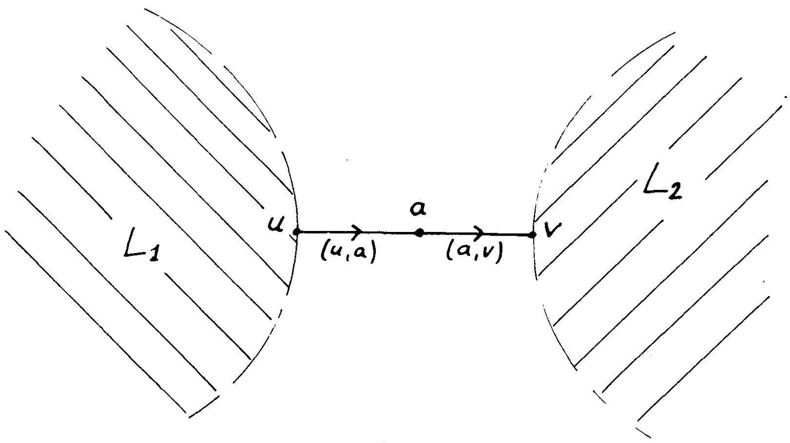

FIG. 7.

(4.4) COROLLAIRE. (Bass-Serre, [Se, § 4]). *Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ de manière que le graphe quotient $G\backslash\Gamma$ soit un segment (arbre comportant une seule arête). Soit $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$, avec $o(a) = u$ et $e(a) = v$. Alors, l'homomorphisme $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \to G$ induit par les inclusions est un isomorphisme.*

Démonstration. L'homomorphisme Ψ est injectif par (4.3). Pour démontrer la surjectivité de Ψ, on observe que l'arête a se projette sur l'unique arête $\bar{a}$ de $G\backslash\Gamma$, ce qui entraîne que $B = \{ u, v \}$ est un ensemble de représentants pour l'action de G sur Som Γ. La proposition (2.4) assure alors que G est engendré par $G_u \cup R_B$, avec $R_B = \{ r \in G \mid$ il existe $s_r \in$ Ar Γ telle que $o(s_r) \in B$ et $e(s_r) \in rB \}$. Soit $r \in R_B$. Comme toutes les arêtes de Γ sont dans l'orbite de a, il existe $h_r \in G$ tel que $s_r = h_r a$. De plus, $o(s_r) = o(a) = u$, d'où $h_r \in G_u$. Donc $e(s_r) = rv = h_r v$, d'où $h_r^{-1} r \in G_v$. On en déduit que G est engendré par $G_u \cup G_v$, d'où la surjectivité de Ψ. ∎

5. Critère pour les HNN-extensions

Soit F un sous-groupe d'un groupe H. Soit $\phi: F \to H$ un homomorphisme injectif (un autre plongement de F dans H). Désignons par $< z >$ le groupe cyclique infini de générateur z. Rappelons que l'on définit le groupe $HNN(H, F, \phi)$ comme le quotient du produit libre $H * < z >$ par la clôture normale des éléments $z^{-1} f z \phi(f)^{-1}$ pour $f \in F$. On dit que le groupe $H^* = HNN(H, F, \phi)$ est obtenu de H, F et ϕ par la *construction HNN*. Le groupe H s'appelle la *base* de H^*, z s'appelle la *lettre stable* et F et $\phi(F)$ sont les *sous-groupes associés* [L-S, Chap. IV, § 2]. Nous allons démontrer le critère suivant pour reconnaître une HNN-extension dans un groupe:

(5.1) Théorème *Soit G un groupe, $F \subset H \subset G$ des sous-groupes de G et $z \in G$ tel que $z^{-1} F z \subset H$. Désignons par $\phi: F \to H$ l'homomorphisme $\phi(f) = z^{-1} f z$. On suppose que G agit sur un ensemble X et qu'il existe des sous-ensembles L_F et L_ϕ de X ainsi qu'un élément $d \in X - (L_F \cup L_\phi)$ satisfaisant aux conditions suivantes: (notation: $\bar{L}_F = L_F \cup \{ d \}$ $\bar{L}_\phi = L_\phi \cup \{ d \}$)*

1) $F \subset G_d$
2) $(H - F) \bar{L}_\phi \subset L_F$
3) $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$
4) $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$ et $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$
5) $z(L_F - z^{-1} \bar{L}_F) \subset L_\phi$ et $z^{-1}(L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$
6) $(H - F) \bar{L}_\phi \cap z^{-1} \bar{L}_F = \emptyset$ et $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \cap z \bar{L}_\phi = \emptyset$

Alors, l'homomorphisme $\Psi: HNN(H, F, \phi) \to G$ induit par les inclusions (avec z comme lettre stable) est injectif.