Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION

Autor: Hausmann, Jean-Claude

Kapitel: 6. Structures bipolaires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51750

inclusions est injectif (avec $\phi(x) = z^{-1}xz$). D'autre part, d'après (2.4), G est engendré par

$$G_u \cup R_{\{u,v\}}\,, \text{ où } R_{\{u,v\}} = \{\, r \in G \mid \text{il existe } a_r \in \operatorname{Ar}\Gamma$$
$$\text{avec } o(a_r) \in \{\, u, v \,\} \text{ et } e(a_r) \in r\,\{\, u, v \,\}\,\}\,.$$

Soit $r \in R_{\{u,v\}}$. Comme toutes les arêtes de Γ sont dans la même orbite, il existe $d_r \in G$ tel que $a_r = d_r a$. On a donc

$$d_r v = d_r z u \in \{\, ru, rv \,\}\,.$$

Si $o(a_r) = u$, on a

$$d_r \in G_u \text{ et } e(a_r) = r_v = d_r v\,,$$

d'où

$$d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}\,.$$

Si $o(a_r) = v$, on a

$$z^{-1} d_r \in G_u \text{ et } e(z^{-1} a_r) = z^{-1} d_r v = z^{-1} r v\,,$$

d'où encore $d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}$. Dans tous les cas on déduit donc que r est dans le sous-groupe engendré par G_u et z, d'où la surjectivité de Ψ. ■

6. Structures bipolaires

Rappelons qu'une *structure bipolaire* sur un groupe G est une partition de G en cinq sous-ensembles F, EE, E^*E, E^*E^* et EE^* satisfaisant aux axiomes 1) à 6) ci-dessous, avec les conventions suivantes : Si A et B sont deux sous-ensembles de G, on définit l'ensemble

$$AB = \{\, g = ab \in G \mid a \in A \text{ et } b \in B \,\}$$

et l'ensemble

$$A^{-1} = \{\, g \in G \mid g^{-1} \in A \,\}\,.$$

Si $X \in \{\, E, E^* \,\}$, alors $(X^*)^* = X$.

Axiomes d'une structure bipolaire:

1) F est un sous-groupe de G

Pour tout $X, Y, Z, X_i \in \{E, E^*\}$ on a:

2) $(XY)F \subset XY$.

3) $(XY)^{-1} \subset YX$.

4) $(XY)(Y^*Z) \subset XZ$.

5) Pour tout $g \in G$, il existe un entier $n(g)$ tel que si $g = g_1 g_2 \dots g_k$ avec $g_i \in X_{i-1}^* X_i$ pour $i \geqslant 1$, alors $k \leqslant n(g)$.

6) $E^*E \neq \emptyset$.

Cette définition d'une structure bipolaire est la généralisation due à Lyndon-Schupp [L-S, IV.6] du fameux concept de Stallings [St]. Remarquons que dans cette version, on ne demande pas que F soit un sous-groupe fini.

(6.1) THÉORÈME. *Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ. Soit $p \in G$ un élément ne laissant aucun sommet fixe. Alors G admet une structure bipolaire avec $p \in E^*E \cup EE^*$.*

Démonstration. Puisque p ne laisse aucun sommet fixe, il existe, par (3.3), une chaîne infinie C_p stable par p et sur laquelle p opère par translation non-triviale. On peut supposer qu'il existe $a \in \operatorname{Ar} C_p$ telle que $pa \in \mathscr{B}(a)$. Si ce n'est pas le cas, on change p en p^{-1}, ce qui n'a pas d'importance puisque $p \in E^*E \cup EE^*$ si et seulement si $p^{-1} \in E^*E \cup EE^*$ par l'axiome 3.

On définit alors $F = G_a$ et les autres ensembles sont déterminés par les conditions suivantes:

$$h \in EE \cup EE^* \Leftrightarrow ha \in \mathscr{R}(a)$$

$$h \in EE^* \cup E^*E \Leftrightarrow d\big(o(a), o(ha)\big) = d\big(e(a), e(ha)\big)$$

ce qui peut se visualiser de la manière suivante:

$r \in EE$

$s \in EE^*$

$t \in E^*E$

$u \in E^*E^*$

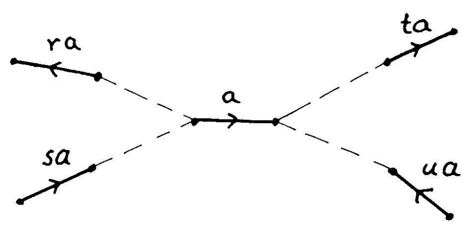

FIG. 8.

Il est clair que l'on a ainsi une partition de E. Les axiomes 1 et 2 sont banals. L'axiome 3 se vérifie par inspection facile des huit cas possibles. Par exemple, pour $(EE)(E^*E) \subset EE$, soit $g \in E^*E$ et $h \in EE$. On utilise le principe que hga est relié à ga comme ga est relié à a, ce qui donne la figure suivante d'où l'on déduit que $hg \in EE$:

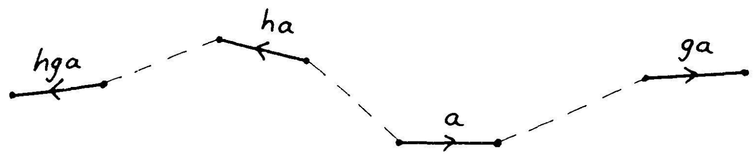

FIG. 9.

La vérification de ces huit cas montre que si $h \in XY$ et $g \in Y^*Z$, alors

$$d(hga, a) > d(ga, a),$$

ce qui permet de vérifier l'axiome 5 en posant $n(g) = d(ga, a)$. Enfin, $p \in E^*E$, d'où l'axiome 6. ∎

(6.2) COROLLAIRE. *Un groupe de génération finie qui agit sur un arbre* Γ *sans sommet fixe (i.e.* $(\mathrm{Som}\,\Gamma)^G = \emptyset$*) admet une structure bipolaire.*

Démonstration. Par [Se, Cor. 3, p. 90], il existe un élément $g \in G$ qui ne laisse aucun sommet fixe. On applique alors (6.1). ∎

Nous allons maintenant donner notre démonstration du théorème de Stallings-Lyndon-Schupp:

(6.3) THÉORÈME. *Un groupe* G *admet une structure bipolaire si et seulement si* G *est un produit amalgamé non-trivial ou une* HNN*-extension.*

Démonstration. Si G est isomorphe à $B_1 *_A B_2$ (respectivement: si G est isomorphe à $HNN(H, A, \phi)$), alors il existe un arbre Γ sur lequel G agit de telle manière que les groupes d'isotropies des sommets soient les conjugués des B_i (respectivement: les conjugués de H) et les groupes d'isotropie des arêtes soient les conjugués de A (voir [Se, pp. 49-50 ou § 5]). Tout élément qui n'appartient pas à l'un de ces conjugués agit donc sur Γ sans sommet fixe, d'où G, par (6.1), peut être muni d'une structure bipolaire $(F, EE, \ldots)$ avec $A = F$.

La démonstration de la réciproque nécessite quelques préliminaires. Par définition, un élément $g \in XY$ est dit *irréductible* si $g \neq ab$, avec $a \in XZ$ et

$b \in Z^*Y$. L'ensemble des éléments irréductibles de XY est noté $I(XY)$. Nous avons besoin des lemmes classiques sur les éléments irréductibles sous une forme légèrement plus précise que celle de [L-S, p. 209], aussi nous les redonnons ci-dessous complètement avec leur démonstration.

Lemme 0. $I(XY)^{-1} \subset I(XY)$.

Démonstration. Soit $g \in I(XY)$. On a $g^{-1} \in YX$ par l'axiome 3. Si $g^{-1} = ab$ avec $a \in YZ$ et $b \in Z^*X$, alors $g = b^{-1}a^{-1} \in (XZ^*)(ZY)$ par l'axiome 4, ce qui contredit l'irréductibilité de g. ■

Lemme 1. $(XY)\,I(YZ) \subset F \cup XE \cup XE^*$ en général et

$$(XY)\,I(YZ) \subset XE \cup XE^* \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Soit $g \in XY$ et $h \in I(YZ)$. Si $gh \in X^*U$, alors

$$h \in g^{-1}(X^*U) \subset (YX)(X^*U)$$

ce qui contredit l'irréductibilité de h. Si $gh = f \in F$, alors

$$YZ \quad hf^{-1} = g^{-1} \in YX$$

par les axiomes 2 et 3, d'où $X = Z$. ■

Lemme 2. $I(XY)(YZ) \subset F \cup EZ \cup E^*Z$ en général et

$$I(XY)(YZ) \subset EZ \cup E^*Z \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Identique à celle du lemme 1. ■

Lemme 3. $I(XY)\,I(YZ) \subset F \cup I(XZ)$ en général et

$$I(XY)\,I(YZ) \subset I(XZ) \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Après les lemmes 1 et 2, il suffit de montrer que si $g \in I(XY)$ et $h \in I(YZ)$, alors gh est irréductible si $gh \notin F$ (ce qui implique que $gh \in XZ$). Supposons que $gh = pq$, avec $p \in XW$ et $q \in W^*Z$, d'où $g = pqh^{-1}$. D'après le lemme 1, qh^{-1} appartient soit à W^*U, ce qui contredit l'irréductibilité de g, ou alors $qh^{-1} \in F$, mais ceci nécessite que $W = Y^*$. Dans ce dernier cas, on aurait

$$g = p(qh^{-1}) \in (XY^*)\,F \subset XY^*$$

par l'axiome 2, d'où $g \in XY^* \cap XY$ ce qui est impossible puisque $XY^* \cap XY = \emptyset$. ■

LEMME 4. $I(XY)F \cup FI(XY) \subset I(XY)$.

Démonstration. Si $g \in I(XY)$ et $f \in F$, alors $gf \in XY$ par l'axiome 2. Si $gf = pq$ avec $p \in XW$ et $q \in W^*Y$, on aurait $g = p(qf^{-1}) \in (XW)(W^*Y)$ ce qui contredit l'irréductibilité de g. D'où $I(XY)F \subset I(XY)$, ce qui entraîne $g^{-1}f^{-1} \in I(YX)$ par le lemme 0 et l'axiome 1. Cela implique $fg \in I(XY)$ par le lemme 0 et donc $FI(XY) \subset I(XY)$. ■

Voici encore un lemme qui ne semble pas se trouver dans la littérature:

LEMME 5. $I(XW)(W^*Y) \cap I(XW^*)(WY) = \emptyset$.

Démonstration. Supposons que $gu = hv$, avec

$$g \in I(XW), u \in W^*Y, h \in I(XW^*) \quad \text{et} \quad v \in WY.$$

Alors, les lemmes 0 et 3 ainsi que l'axiome 4 entraînent que

$$\begin{aligned} WY \ni = (h^{-1}g)\,u &\in I(W^*X)\,I(XW)(W^*Y) \\ &\subset I(W^*W)(W^*Y) \subset W^*Y \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque $WY \cap W^*Y = \emptyset$. ■

Nous pouvons maintenant poursuivre la démonstration de (6.3). L'axiome 2 montre que la partition $(F, EE, ...)$ de G induit une partition en cinq sous-ensembles $\{\bar{1}\}, \overline{EE}, \overline{E^*E}, \overline{EE^*}$ et $\overline{E^*E^*}$ de l'ensemble G/F des classes à gauche de G modulo F.

Soient $B_1 = F \cup I(EE)$ et $B_2 = F \cup I(E^*E^*)$. L'axiome 1 ainsi que les lemmes 0, 3 et 4 impliquent que B_i est un sous-groupe de G. On a donc un homomorphisme $\Psi: B_1 *_F B_2 \to G$ qui étend les inclusions de B_i dans G.

Affirmation: Ψ est injectif. Cela se démontre en appliquant le critère (4.1) à la situation:

$$X = G/F, \qquad d = \bar{1},$$
$$L_F = \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \qquad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*}$$

La condition 1 de (4.1) est banale et la condition 2 se vérifie facilement:

$$(B_1 - F)\,\overline{E^*X} \subset (EE)\,\overline{E^*X} \subset \overline{EX} \subset L_1 \text{ (axiome 4)}.$$

Idem pour $(B_2 - F))(L_1 \cup \{d\}) \subset L_2$.

L'axiome 5 entraîne que G est engendré par les éléments irréductibles. Donc, si l'on suppose que $I(E^*E) = \emptyset$, cela implique que $I(EE^*) = \emptyset$ par le lemme 0 et Ψ est surjectif. On a donc $G = B_1 *_F B_2$ et l'axiome 6 empêche que $F = B_i$

(donc le produit amalgamé est non-trivial). En effet, si par exemple $F = B_2$, alors $G = F \cup EE$ ce qui est impossible puisque $E^*E \neq \emptyset$.

Il reste à examiner le cas où $I(E^*E) \neq \emptyset$. Soit donc $z \in I(E^*E)$ et posons $H = B_1$. On a, par les lemmes 3 et 4:

$$z^{-1} I(E^*E) \subset I(EE^*)\, I(E^*E) \subset H$$

$$I(EE^*)\, z \subset I(EE^*)\, I(E^*E) \subset H$$

$$z^{-1} I(E^*E^*)\, z \subset I(EE^*)\, I(E^*E)\, I(EE) \subset H$$

ce qui montre que G est engendré par z et H (puisque l'on a déjâ vu que G est engendré par les éléments irréductibles). D'autre part, par les lemmes 3 et 4, on a

$$z^{-1} Fz \subset I(EE^*)\, I(E^*E) \subset H\,.$$

Soit $\phi\colon F \to H$ l'homomorphisme injectif défini par $\phi(x) = z^{-1}xz$. On a donc un homomorphisme $\zeta\colon HNN(H, F, \phi) \to G$ qui étend l'inclusion de H dans G et qui est surjectif. On va démontrer l'injectivité de ζ en appliquant le critère (5.1) à la situation:

$$X = G/F \qquad d = \bar{1}$$

$$L_F = \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \qquad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*}$$

Il faut vérifier les conditions 1 à 6 de (5.1):

Point 1). Banal.

Point 2). $(H-F)\,\overline{E^*X} \subset (EE)\,\overline{E^*X} \subset \overline{EX}$ (axiome 4).

Point 3). Observons que $zHz^{-1} \subset I(E^*E) \cup F$ par les lemmes 3 et 4. Mais si $zhz^{-1} \in F$ avec $h \in H$, alors $h \in z^{-1}Fz = \phi(F)$. Donc

$$z\big(H - \phi(F)\big)\, z^{-1} \subset E^*E^*\,,$$

et le point 3) se démontre comme le point 2).

Point 4). Se démontre comme le point 2).

Point 5). L'axiome 5 implique que

$$EX = I(EE)\, E^*X \cup I(EE^*)\, EX\,.$$

Or $I(EE^*)\, z \subset H$ par le lemme 3, d'où $I(EE^*) \subset Hz^{-1}$. On a donc

$$z\,(\overline{EX}) = zI(EE)\,(\overline{E^*X}) \cup zHz^{-1}\,(\overline{EX})\,.$$

Par le lemme 3, on a

$$zI(EE)\,(\overline{E^*X}) \subset I(E^*E)\, I(EE)\,(\overline{E^*X}) \subset \overline{E^*X} \subset L_\phi\,.$$

Soit $x = hz^{-1}v$ avec $h \in H$ et $v \in \overline{EX}$. Par les lemmes 3 et 4, on a

$$zhz^{-1} \in I(E^*E^*) \cup F .$$

Si $zhz^{-1} \in I(E^*E^*)$, on aura $zx \in \overline{E^*X} \dot{\subset} L_\phi$ par l'axiome 4. Or, ce dernier cas se produit toujours si $x \not\in z^{-1}L_F$, puisque si $zhz^{-1} \in F$, on a $h \in z^{-1}Fz$ et $x \in z^{-1}F(\overline{EX}) \subset z^{-1}\overline{EX} \subset z^{-1}L_F$ (le fait que $F(EX) \subset EX$ provient des axiomes 2 et 3). Idem pour la seconde partie du point 5.

Point 6).

$$(H-F)\,\overline{E^*X} \cap z^{-1}\overline{EY} \subset I(EE)\,\overline{E^*X}$$
$$\cap\, I(EE^*)\,\overline{EY} = \emptyset$$

par le lemme 5. Idem pour la seconde partie du point 6), en utilisant le fait vu au point 3) que $z\big(H-\phi(F)\big)z^{-1} = I(E^*E^*)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Du] Dunwoody, M. J. Accessibility and groups of cohomological dimension one. *Proc. London Math. Soc. 38* (1979), 193-215.

[F-K] Fricke, R. und F. Klein. *Vorlesungen über die Theorie des Automorphen Functionen, Vol. 1.* Leipsig 1897.

[L-S] Lyndon, R. and P. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag 1977.

[Le] Lehner, J. *Discontinous Groups and Automorphic Functions.* Providence, Amer. Math. Soc. 1964.

[Se] Serre, J.-P. Arbres, Amalgames, SL_2. *Astérisque N° 46*, 1977.

[St] Stallings, J. *Group Theory and Three-dimensional Manifolds.* Yale University Press, 1971.

[S-W] Scott, P. and C. T. C. Wall. Topological methods in group theory. In "*Homological group theory*", Proc. Conf. Durham 1977, *London Math. Soc. Lect. Note Series 36* (1979), 137-204.

[Ti] Tits, J. Sur le Groupe des Automorphismes d'un Arbre. *Essays on Topology and related Topics* (dédié à G. de Rham), Springer-Verlag 1970, pp. 188-211.

[Ti 2] —— Free Subgroups in Linear Groups. *J. of Algebra 20* (1972), 250-270.

(Reçu le 15 août 1980)

Jean-Claude Hausmann

Université de Genève
Case postale 124
1211 Genève 24 (Suisse)