

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdős, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §4. Nombres -intéressants
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51737>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

avec $a \geq 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. NOMBRES ω -INTÉRESSANTS

Définition. On dit que n est ω -intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1: Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ est ω -intéressant. En effet: si $\omega(m) \leq k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geq A_k 3^\Delta$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \left(1 + \frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

Propriété 2: Soit n vérifiant :

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω -intéressant.

Démonstration: Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geq A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3: Pour une infinité de valeurs de k , il existe un nombre ω -intéressant, plus grand que A_k et ayant $k - 1$ facteurs premiers.

Démonstration : Soit k tel que

$$(3) \quad \frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1};$$

alors $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} (p_k + 1)$ est ω -intéressant :

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$ et que pour $k \geq 2$, d'après la propriété 2, n' est ω -intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k - 1$; si m vérifie $n < m < n'$ on a : $\omega(m) \leq k - 1$; si m vérifie $n' \leq m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n};$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1}$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraîne la relation (3).

Remarque 1. Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < \frac{p_k}{k-1}$ il est facile de voir qu'il

n'existe aucun nombre ω -intéressant compris entre A_k et $n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$.

Cette situation se produit pour une infinité de k . On peut donc conjecturer que pour une infinité de k , les nombres ω -intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) \geq k$.

Remarque 2. Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leq n = A_k \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante : Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \dots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geq r$. (cf. [Lan]).

Considérons le produit : $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1} p_k + t$. Alors le nombre $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-2} (p_{k-1} p_k + t_q)$ a $k-1$ facteurs premiers et l'on a $n \leq A_k (1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$. Le résultat de Ramachandra (cf. [Ramac]) :

si $r^{3/2} \leq u \leq r^{\log \log r}$, on a: $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \frac{\log u}{\log r}\right)$

permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leq A_k \left(1 + \frac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On

peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n un nombre ω -intéressant, $n \geq (k-1) A_k$ alors $\omega(n) \geq k$. Cela entraîne qu'un nombre ω -intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. Soit $n \geq (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leq k-1$; on écrit

$$A_k(t-1) \leq n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geq k$. Ce nombre n ne peut pas être ω -intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k t} \leq \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geq (k-1) A_k$ par $n \geq (1 + \varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω -intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω -largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω -largement composés non ω -intéressants (exemple: $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

PROPOSITION 3. Posons $N_k(x) = \text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a lorsque $x \rightarrow +\infty$ (avec les notations de l'introduction)

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y .

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable (en remplaçant $\frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}$ par $\frac{F(\alpha)}{1 - \alpha}$) pour estimer $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) \leq \alpha \log \log x\}$.