

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N  
**Autor:** Erdős, Paul / Nicolas, Jean-Louis

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51737>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

On peut raisonnablement conjecturer que pour  $\varepsilon$  assez petit, la fonction  $n \mapsto n - d(n)^\varepsilon$  a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour  $\varepsilon = 1$ . D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour  $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ ,  $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$  est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que  $n - \omega(n)^{\omega(n)}$  n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit  $t_k$  tel que  $\omega(n+t_k) \geq k$ . On a évidemment  $t_k \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$  et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de  $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ .

Il n'est pas difficile de montrer que si  $n$  est un point d'étranglement pour la fonction  $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ , alors  $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$ . Il semble vraisemblable que pour  $n > n_0$ , il existe  $m > n$  avec  $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$  et même,  $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$ , ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout  $n > n_0$ , existe-t-il un  $m > n$  tel que  $m - d(m) < n - 2$ . On a besoin de  $n - 2$ , parce que

$$\min_{m=n+1, n+2} m - d(m) \leq n - 2, \text{ mais on ne sait rien à ce sujet.}$$

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit  $f$  additive ayant une suite infinie  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  de points d'étranglement et  $a < b$ . On peut trouver, pour  $n_k$  assez grand, dans l'intervalle  $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$  un nombre  $c$ , premier à  $ab$ ; on aura alors

$$ca < n_k < cb,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et  $f(a) < f(b)$ .

#### RÉFÉRENCES

- [And] ANDERSON, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc.* 42 (1967), 137-148.
- [Com] COMTET, L. *Analyse combinatoire*. Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.
- [Del 1] DELANGE, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math.* 83 (1959), 101-111.

- [Del 2] DELANGE, H. Sur des formules de A. Selberg. *Acta Arithmetica* 19 (1971), 105-146.
- [Dieu] DIEUDONNÉ, J. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968. collection Méthodes.
- [Erd 1] ERDÖS, P. On the integers having exactly  $k$  prime factors. *Ann. of Math.* (2) 49 (1948), 53-66.
- [Erd 2] — On arithmetical properties of Lambert series. *Journal Indian Math. Soc.* 12 (1948), 63-66.
- [Erd 3] — On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math.* (2) 47 (1946), 1-20.
- [Hal 1] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [Hal 2] HALBERSTAM, H. and K. F. ROTH. *Sequences*. Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [Har] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. The normal number of prime factors of a number  $n$ . *Quart. J. of Math.* 48 (1917), 76-92 et *Collected papers of Ramanujan*, 262-275.
- [Kac] ERDÖS, P. and M. KAC. On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 25 (1939), 206-207.  
The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *Amer. J. Math.* 62 (1940), 738-742.
- [Kol] KOLESNIK, G. and E. G. STRAUS. On the distribution of integers with a given number of prime factors (*à paraître*).
- [Land] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea Publishing Company, 1953.
- [Lan] LANGEVIN, M. Sur la fonction plus grand facteur premier. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou, Paris*. 16<sup>e</sup> année 1974-1975, 29 p.
- [Mon] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. On the large sieve. *Mathematika* 20 (1973), 119-134.
- [Nel] NELSON, C., D. E. PENNEY and C. POMERANCE. 714 and 715. *J. Recreational Mathematics*, vol. 7, No. 2, Spring 1974.
- [Nic] NICOLAS, J. L. Répartition des nombres largement composés. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou*. 19<sup>e</sup> année, 1977-1978, n° 41 et *Acta Arithmetica* 34 (1979), 379-390.
- [Pis] PISOT, C. and I. J. SCHOENBERG. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation. *Illinois J. of Math.* vol. 8, No. 1 (1964), 40-56.
- [Pra] PRACHAR, K. *Primzahlverteilung*. Springer Verlag 1957, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 91.
- [Ramac] RAMACHANDRA, K. A note on numbers with a large prime factor II. *J. Indian Math. Soc.* 34 (1970), 39-48.
- [Ram] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. *Proc. of the London Math. Soc.* 2, 16 (1917), 112-132. *Collected Papers of S. Ramanujan*, 245-261.
- [Rid] RIDOUT, D. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika* 4 (1957), 125-131.
- [Roth] ROTH, K. F. and G. SZEKERES. Some asymptotic formulae in the theory of partitions. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 5 (1954), 241-259.
- [Sat] SATHE, L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III, IV. *J. Indian Math. Soc.* 17 (1953), 63-141 et 18 (1954), 27-81.
- [Sch] SCHMIDT, W. M. Approximation to algebraic numbers. *Enseignement Mathématique* 17 (1971), 187-253 et *Monographies de l'Enseignement Mathématique* n° 19, 1972.

- [Sel 1] SELBERG, A. Note on a paper by L. G. Sathe. *J. Indian Math. Soc.* 18 (1954), 83-87.
- [Sel 2] — On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid.* 47 (1943), fasc. 6, 87-105.
- [Tij] TIJDEMAN, R. On the equation of Catalan. *Acta Arith.* 29 (1976), 197-209.
- [Tur] TURAN, P. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *J. London Math. Soc.* 9 (1934), 274-276.
- [Wri] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford, at the Clarendon Press, IVth edition, 1960.

(Reçu le 15 novembre 1979)

Paul Erdős

Akademia Matematikai Intezete  
Realtanoda u. 13-15  
H-1053 Budapest, Hongrie

Jean-Louis Nicolas

Département de Mathématique  
U.E.R. des Sciences de Limoges  
123, avenue Albert-Thomas  
F-87060 Limoges cédex, France

**Vide-leer-empty**