On peut raisonnablement conjecturer que pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^{\varepsilon}$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit t_k tel que $\omega(n+t_k) \geqslant k$. On a évidemment $t_k \leqslant 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$ et même, $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$, ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$. On a besoin de $n - 2$, parce que $\min\limits_{m = n+1, n+2} m - d(m) \leqslant n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet.

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ de points d'étranglement et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$ un nombre c, premier à $a\,b$; on aura alors

$$c\,a < n_k < c\,b\,,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

RÉFÉRENCES

[And] ANDERSON, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc. 42* (1967), 137-148.

[Com] COMTET, L. *Analyse combinatoire*. Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.

[Del 1] DELANGE, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math. 83* (1959), 101-111.

[Del 2] DELANGE, H. Sur des formules de A. Selberg. *Acta Arithmetica 19* (1971), 105-146.

[Dieu] DIEUDONNÉ, J. *Calcul infinitésimal.* Hermann, Paris, 1968. collection Méthodes.

[Erd 1] ERDÖS, P. On the integers having exactly k prime factors. *Ann. of Math. (2) 49* (1948), 53-66.

[Erd 2] —— On arithmetical properties of Lambert series. *Journal Indian Math. Soc. 12* (1948), 63-66.

[Erd 3] —— On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math. (2) 47* (1946), 1-20.

[Hal 1] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods.* Academic Press, 1974.

[Hal 2] HALBERSTAM, H. and K. F. ROTH. *Sequences.* Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[Har] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. of Math. 48* (1917), 76-92 et *Collected papers of Ramanujan*, 262-275.

[Kac] ERDÖS, P. and M. KAC. On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. 25* (1939), 206-207.
The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *Amer. J. Math. 62* (1940), 738-742.

[Kol] KOLESNIK, G. and E. G. STRAUS. On the distribution of integers with a given number of prime factors *(à paraître)*.

[Land] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* Chelsea Publishing Company, 1953.

[Lan] LANGEVIN, M. Sur la fonction plus grand facteur premier. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou, Paris.* 16e année 1974-1975, 29 p.

[Mon] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. On the large sieve. *Mathematika 20* (1973), 119-134.

[Nel] NELSON, C., D. E. PENNEY and C. POMERANCE. 714 and 715. *J. Recreational Mathematics, vol. 7, No. 2*, Spring 1974.

[Nic] NICOLAS, J. L. Répartition des nombres largement composés. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou.* 19e année, 1977-1978, no 41 et *Acta Arithmetica 34* (1979), 379-390.

[Pis] PISOT, C. and I. J. SCHOENBERG. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation. *Illinois J. of Math. vol. 8, No. 1* (1964), 40-56.

[Pra] PRACHAR, K. *Primzahlverteilung.* Springer Verlag 1957, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 91.

[Ramac] RAMACHANDRA, K. A note on numbers with a large prime factor II. *J. Indian Math. Soc. 34* (1970), 39-48.

[Ram] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. *Proc. of the London Math. Soc. 2*, 16 (1917), 112-132. *Collected Papers of S. Ramanujan*, 245-261.

[Rid] RIDOUT, D. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika 4* (1957), 125-131.

[Roth] ROTH, K. F. and G. SZEKERES. Some asymptotic formulae in the theory of partitions. *Quart. J. Math. Oxford (2) 5* (1954), 241-259.

[Sat] SATHE, L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III, IV. *J. Indian Math. Soc. 17* (1953), 63-141 et *18* (1954), 27-81.

[Sch] SCHMIDT, W. M. Approximation to algebraic numbers. *Enseignement Mathématique 17* (1971), 187-253 et *Monographies de l'Enseignement Mathématique no 19*, 1972.

[Sel 1] SELBERG, A. Note on a paper by L. G. Sathe. *J. Indian Math. Soc. 18* (1954), 83-87.

[Sel 2] —— On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid. 47* (1943), fasc. 6, 87-105.

[Tij] TIJDEMAN, R. On the equation of Catalan. *Acta Arith. 29* (1976), 197-209.

[Tur] TURAN, P. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *J. London Math. Soc. 9* (1934), 274-276.

[Wri] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford, at the Clarendon Press, IVth edition, 1960.

(Reçu le 15 novembre 1979)

Paul Erdös

Akademia Matematikai Intezete
Realtanoda u. 13-15
H-1053 Budapest, Hongrie

Jean-Louis Nicolas

Département de Mathématique
U.E.R. des Sciences de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges cédex, France

vide-leer-empty