

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES  
CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

**Autor:** Lehmann, Daniel  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51739>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

par Daniel LEHMANN <sup>1)</sup>

## 1. INTRODUCTION

On connaît le « théorème local » de Gauss-Bonnet, sur une surface  $V$  munie d'une métrique riemannienne  $g$ :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_P \Omega = 1 - \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\partial P} \rho_g ds + \sum_P \alpha_i \right],$$

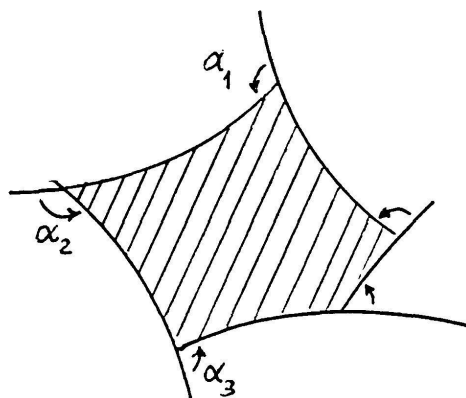
$\rho_g$  désignant la courbure géodésique sur le bord  $\partial P$  d'un pavé  $P$ ,  $\alpha_i$  les discontinuités angulaires de  $\partial P$  et  $\Omega$  la 2-forme de courbure d'une connexion  $\nabla$ , quelconque (pas forcément celle de Levi-Civita), respectant la métrique  $g$ .

A partir de ce théorème local, on retrouve classiquement le « théorème global » de Gauss-Bonnet quand  $V$  est une surface compacte (orientée ou non):

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = \chi_V \quad (\text{invariant d'Euler-Poincaré}),$$

en munissant  $V$  d'un pavage  $(P_1, \dots, P_\lambda, \dots, P_F)$ , et en décomposant l'intégrale  $\iint_V \Omega$  sous la forme  $\sum_{\lambda=1}^F \iint_{P_\lambda} \Omega$ .

Si l'on suppose, maintenant, que la métrique  $g$  et la connexion ne sont plus définies qu'au-dessus d'un ouvert  $U = V - S$  contenant les sommets et les arêtes du pavage utilisé, autrement dit si  $\mathcal{S} = \prod_{\lambda=1}^F \mathcal{S}_\lambda$  où  $\mathcal{S}_\lambda$



<sup>1)</sup> ERA au CNRS n° 07-590.

désigne un fermé (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé  $P_\lambda$ , le terme de droite dans la formule locale de Gauss-Bonnet conserve une signification, bien que le terme de gauche  $\frac{1}{2\pi} \iint_{P_\lambda} \Omega$  puisse ne plus en avoir: on appellera alors « résidu » de  $(\nabla, g)$  on  $P_\lambda$  l'expression

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\partial P} \rho_g ds + \sum_{P_\lambda} \alpha_i \right],$$

et on démontrera le « théorème des résidus »

$$\sum_{\lambda=1}^F \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \chi_V,$$

dont on verra qu'il contient comme cas particuliers, outre le théorème global de Gauss-Bonnet, le théorème de Hopf relatif à l'indice des champs de vecteurs. [Il contient d'ailleurs aussi la formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés (cf. [4]).]

Plus généralement, pour les  $G$ -fibrés principaux différentiables  $E \rightarrow V$  ( $G$  groupe de Lie), on peut étendre la théorie de Chern-Weil pour les classes caractéristiques réelles de dimension  $\leq 2k$  ( $k$  entier  $> 0$ ) au cas de connexions définies seulement au-dessus du complémentaire  $U = V - \mathcal{S}$  d'une partie fermée  $\mathcal{S}$  de  $V$  vérifiant la propriété suivante: il existe une triangulation différentiable  $K$  de  $V$  dont le  $2k - 1$  squelette  $sk^{2k-1}K$  ne rencontre pas  $\mathcal{S}$ . Lorsque  $\mathcal{S} = \emptyset$ , on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil. On retrouve par contre la théorie de l'obstruction à prolonger à  $sk^{2k}K$  une section  $\sigma_1$  de  $E$  définie au-dessus de  $sk^{2k-1}K$ , prenant pour  $\mathcal{S}$  le complémentaire dans  $V$  d'un voisinage tubulaire ouvert  $U$  de  $sk^{2k-1}K$  dans  $V$ , pour  $\omega$  la connexion plate sur  $E|_U$  associée à la trivialisat ion définie par une section différentiable  $\sigma$  de  $E|_U$  dont la restriction à  $sk^{2k-1}K$  est homotope à  $\sigma_1$ . (La théorie de Chern-Weil généralise le théorème de Gauss-Bonnet, tandis que la théorie de l'obstruction généralise le théorème de Hopf.)

Bien que cette généralisation ait été rédigée dans [4], il nous a semblé utile d'exposer à part le cas élémentaire de l'invariant d'Euler Poincaré des surfaces compactes, étant donné ses retombées dans l'enseignement universitaire « sous gradué » (cf. par exemple [1] [3] [5] [6] [7]).