Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

Soit V une surface différentiable (variété C^∞ de dimension 2), non nécessairement compacte pour le moment, et $g = \langle , \rangle$ une métrique riemannienne sur V.

Soit ∇ une *connexion métrique* sur V. Pour tout couple (X, Y) de champ de vecteurs, $\nabla_X Y$ désigne un autre champ de vecteurs

(i) dépendant $\mathscr{C}^\infty(V)$-linéairement de X ($\mathscr{C}^\infty(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ de V dans $\mathbf{R}$),

(ii) dépendant additivement de Y,

(iii) vérifiant, pour toute $u \in \mathscr{C}^\infty(V)$,

$$\nabla_X(uY) = (X.u)\, Y + u \nabla_X Y,$$

(iv) respectant la métrique g au sens suivant: pour tous champs de vecteurs, X, Y, Z, on a

$$X . < Y, Z > \;=\; < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > .$$

On sait qu'il existe toujours de telles connexions métriques, par exemple celle de Levi-Civita caractérisée par la formule supplémentaire

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Mais nous ne nous limiterons pas à celle-ci.

Si U désigne un ouvert parallélisable de V (c'est-à-dire dont le module des champs de vecteurs est libre) et si (A, B) désigne un champ de repères *orhtonormés* sur U, l'expression

$$\Omega(X, Y) = < \nabla_X \nabla_Y B - \nabla_Y \nabla_X B - \nabla_{[X, Y]} B, A >$$

ne dépend que de l'orientation du champ de repères (A, B) mais non à proprement parler de A et B, et dépend $\mathscr{C}^\infty(V)$-bilinéairement de X et Y: c'est donc une 2-forme sur U, que l'on peut définir sur la surface V toute entière si celle-ci est orientable, et qu'on appelle 2-*forme de courbure* (si on change l'orientation de U, Ω est changée en $-\Omega$). [Rappelons, lorsque ∇ est la connexion de Levi-Civita, que la courbure représente l'obstruction à l'existence d'une isométrie locale avec le plan euclidien.]

Soit $s \to \gamma(s)$ un arc de courbe différentiable sur V, supposé paramétré par l'abscisse curviligne s; le champ des vecteurs tangents $\tau = \dfrac{d\gamma}{ds}$ est donc partout de longueur 1: on déduit de (iv) que $\nabla_\tau \tau$ est normal à τ en tout point de γ. Supposons alors le support de γ inclus dans un ouvert orientable U de V et soit $\nu(s)$ le vecteur tangent à V en $\gamma(s)$ déduit de $\tau(s)$ par rotation de $+\pi/2$ (une orientation de U ayant été choisie). Il existe donc une fonction différentiable $s \to \rho_g(s)$ telle que

$$\nabla_\tau \tau = \rho_g \nu :$$

c'est cette fonction que nous appellerons la *courbure géodésique de* γ (elle dépend de l'orientation de γ et de l'orientation de U).

Calculs locaux. Soit U un ouvert parallélisable de V, et (A, B) un champ de repères orthonormés sur U: Les formules (i), (ii), (iii), (iv) prouvent l'existence d'une 1-forme $\omega_{(A,B)}$ sur U telle que

$$\begin{cases} \nabla_Y B = +\omega_{(A,B)}(Y)\,A \\ \nabla_Y A = -\omega_{(A,B)}(Y)\,B \end{cases}$$

pour tout champ de vecteurs Y sur U. (On notera en abrégé: $\nabla B = +\omega A$, $\nabla A = -\omega B$). Si (A', B') est un autre champ de repères orthonormés sur U déduit de (A, B) par rotation θ ($A' = \cos\theta.A + \sin\theta.B$, $B' = -\sin\theta.A + \cos\theta.B$), où $\theta : U \to R/2\pi Z$ est une fonction différentiable, on vérifie aisément que

(*v*) $$\omega_{(A',B')} = \omega_{(A,B)} - d\theta$$

ATTENTION: malgré la notation, la 1-forme fermée $d\theta$ peut ne pas être un cobord si U n'est pas simplement connexe; la fonction θ prend en effet ses valeurs dans $\mathbf{R}/2\pi Z$, et non dans $\mathbf{R}$).

Si on oriente U en décrétant le champ de repères (A, B) direct, la 2-forme de courbure est donnée par

(*vi*) $$\Omega = d\omega_{(A,B)}$$

Enfin, si γ est une courbe orientée dans U, et si l'angle polaire $(A_{\gamma(s)}, \tau(s))$ de son vecteur tangent unitaire $\tau(s)$ est égal à $\varphi(s)$

$$(\tau = \cos\varphi\, A + \sin\varphi\, B)\,,$$

on vérifie aisément:

(*vii*) $$\rho_g(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} - \omega(\tau)\,.$$