Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN
Autor: Prestel, Alexander
Kapitel: 3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Formel σ muß also in S ausdrücken, daß $\langle x_1, x_2\rangle$ und $\langle y_1, y_2\rangle$ die f-Bilder der affinen Koordinaten $\langle r_1, r_2\rangle$ und $\langle s_1, s_2\rangle$ eines Punktes aus S sind. Dabei genügt es natürlich, wenn

$$\langle x_1, x_2\rangle \approx \langle f(r_1), f(r_2)\rangle \text{ und } \langle y_1, y_2\rangle \approx \langle f(s_1), f(s_2)\rangle$$

gilt, wobei $\approx$ die analog zu $\sim$ mit $\oplus$ in $[e_0, e_\infty\rangle$ gebildete Äquivalenzrelation ist. Nach Szczerba-Tarski [S-T_2], §5 läßt sich eine Formel $K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$ angeben, die für $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ gerade besagt, daß

$$(f(z'), f(z'')) = (\langle x_1, x_2\rangle/\approx, \langle y_1, y_2\rangle/\approx)$$

ist. Wir können also

$$\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2) :\equiv \exists z\, K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$$

setzen.

Nach diesen Ausführungen dürfte klar sein, daß die folgende Übersetzungsvorschrift für die Formeln α und β einen geometrisch definierten Schnitt auf $[e_0, e_1]$ liefert, dessen Realisierung in S eine Realisierung des ursprünglichen Schnittes auf $[0, 1]$ nach sich zieht:

(1) ersetze in α und β Quantifikationen $\forall x \rho$ bzw. $\exists x \rho$ durch $\forall x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \Rightarrow \rho)$ bzw. $\exists x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \wedge \rho)$,

(2) ersetze die Teilformeln $u + v = w$ und $u \cdot v = w$ durch $u \oplus v = w$ bzw. $u \odot v = w$,

(3) ersetze die Teilformeln $S(\langle u_1, u_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle)$ durch $\sigma(u_1, u_2; v_1, v_2)$,

(4) ersetze Parameter r durch $f(r)$.

3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit

Wir wollen nun den im 1. Abschnitt formulierten Nicht-Charakterisierbarkeitssatz beweisen, indem wir ihn auf ein Resultat von R. Montague in [M] zurückführen.

Dazu betrachten wir zuerst einen reell abgeschlossenen Körper R mit einer Teilmenge N, die die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

(a) $O \in N$ und $r \in N \Rightarrow r + 1 \in N$

(b) $r, s \in N, r < s \quad \Rightarrow r + 1 \leqslant s$

(c) $(\forall r \in R, r \geqslant O)(\exists t \in N)\, t \leqslant r < t + 1$

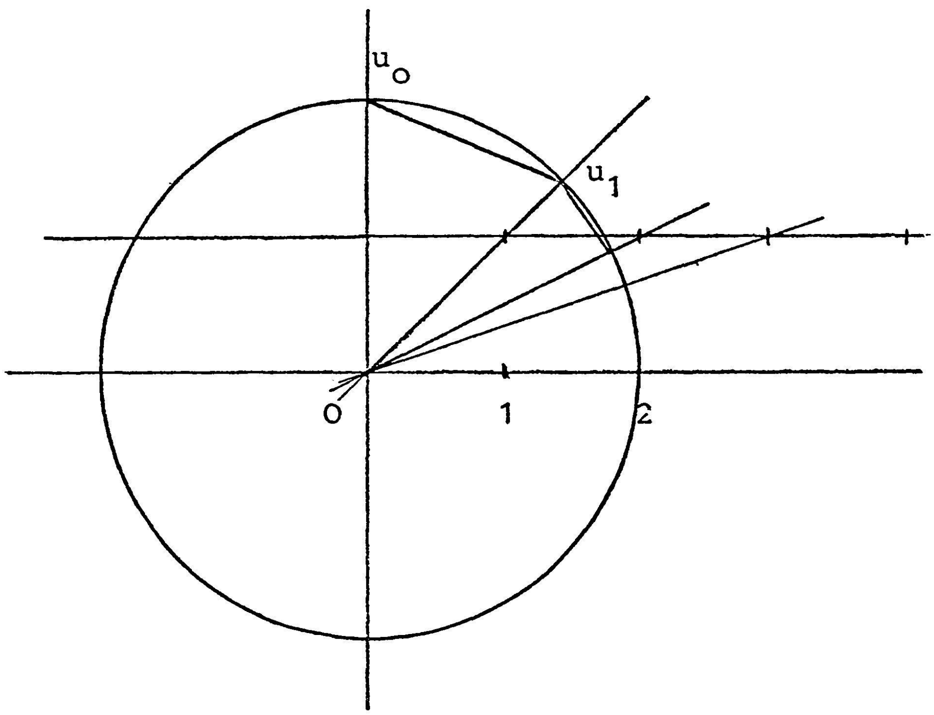
Die Menge N enthält dann alle natürlichen Zahlen, ist jedoch, falls R nicht-archimedisch ist, nicht eindeutig festgelegt. Mit Hilfe von N definieren wir die folgende Teilmenge S_N^R von R^2:

$$(x', x'') \in S_N^R : \Leftrightarrow [(x' \leqslant O \vee x'' \leqslant O) \wedge x'^2 + x''^2 < 4] \vee$$
$$\left[O < x', x'' \wedge (\exists t \in N)\, t \leqslant \frac{x'}{x''} < t+1 \wedge (x', x'') \in \Delta_t\right],$$

wobei Δ_t das Innere des Dreieckes mit den Eckpunkten $(0, 0) = 0$,

$$\left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\right) = u_t, \left(\frac{2(t+1)}{\sqrt{1+(t+1)^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+(t+1)^2}}\right) = u_{t+1},$$

mit Einschluß der offenen Strecke von 0 nach u_t bezeichnet.



Wegen (a)-(c) ist S_N^R offensichtlich konvex und offen.

LEMMA. *Es sei* R *reell abgeschlossen und* $N \subset R$ *erfülle* (a)-(c). *Dann ist* S_N^R *genau dann ein Modell von* GA_2, *falls in* R *jeder* N*-definierbare Schnitt realisiert ist.*[1])

Beweis. Dieses Lemma folgt unmittelbar aus dem Charakterisierungslemma, wenn man beachtet daß nicht nur S_N^R mit Hilfe von N, sondern

[1]) Dies ist analog zu S-definierbar zu verstehen, d.h. jetzt darf in den definierenden arithmetischen Formeln α und β ein zusätzliches 1-stelliges Prädikat für N benützt werden.

auch umgekehrt N mit Hilfe von S_N^R definiert werden kann. Es gilt nämlich für $t \in R$, $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4)(\exists s)\left[s^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = r \wedge \left(s, \frac{s}{t}\right) \in S_N^R\right],$$

d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(t, 1)$ reicht in S_N^R bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage ρ der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S, so daß für $S \subset R^2$ mit S konvex und offen und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt. Für jedes $N \subset R$, das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man ρ^* aus ρ erhält, indem man die Definition von S_N^R in ρ für das Prädikat S einsetzt. ρ^* hat jetzt das zusätzliche Prädikat N. Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

> Ist R reell abgeschlossen und hat $N \subset R$
> die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann
> in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert,
> falls in (R, N) die einzelne Aussage ρ^* gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper R mit Teilprädikat N mit (a)-(c), in dem jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed" ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit" zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und ρ^*) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

4. Schlussbemerkungen

1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

Satz′. *Es gibt keine Aussage ρ der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat S, so dass für konvexe offene Teilmengen $S \subset R^2$ und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt.*