

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN  
**Autor:** Prestel, Alexander

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51743>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dabei meint „schwache 2. Stufe“, daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage  $\rho$  gäbe, so würde  $\rho$  insbesondere in  $(\mathbf{R}, S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}})$  gelten. Ersetzen wir  $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$  in  $\rho$  durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage  $\rho^*$  der schwachen 2. Stufe, die in  $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$  gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl  $n \geq 2$  gibt, so daß die durch  $\Delta_n^1$ -Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper  $R_n$  von  $\mathbf{R}$  bilden, in dem einerseits  $\rho^*$  gelten würde, der aber andererseits nicht alle  $\mathbf{N}$ -definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits  $\rho$  in  $(R_n, S_{\mathbf{N}}^{R_n})$  gelten, andererseits ist aber  $S_{\mathbf{N}}^{R_n}$  nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von  $GA_2$ .

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung  $V = L$  bewiesen werden. Der Satz' behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge  $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$  wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von  $GA_2$  zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von  $GA_2$  über  $\mathbf{R}$  gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom  $C^2$  der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie  $GA_2$  ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren“ hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper  $R$  eine Charakterisierung derjenigen  $S_{\mathbf{N}}^R$  angekündigt, die Modelle von  $GA_2$  sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T<sub>1</sub>] ungelöst, nämlich, ob  $GA_2$  eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

#### LITERATUR

- [A] APT, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 20 (1972), 347-348.  
 [C] COXETER, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.  
 [H] HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.  
 [K] KLINGENBERG, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.

- [M] MONTAGUE, R. Semantical closure and non finite axiomatizability I. *In: Infinitistic Methods*, Warschau 1961, 286-302.
- [P-S] PRESTEL, A. and L. W. SZCZERBA. Non-axiomatizability of real general affine geometry. *Fund. Math.* 104 (1979), 193-202.
- [Sch] SCHWABHÄUSER, W. A class of undecidable models of general affine geometry. *Abstract, presented at the Int. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Hannover 1979.
- [S-T<sub>1</sub>] SZCZERBA, L. W. and A. TARSKI. Metamathematical properties of some affine geometries. *In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1964 Int. Congress*, Amsterdam 1965, 166-178.
- [S-T<sub>2</sub>] ——— Metamathematical discussion of some affine geometries. *Fund. Math.* 104 (1979), 155-192.
- [S] SZMIELEW, W. Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 30-52.
- [T] TARSKI, A. What is elementary geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 16-29.

(Reçu le 9 septembre 1980)

Alexander Prestel

Fakultät für Mathematik  
Universität Konstanz  
Postfach 5560  
West Germany