Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN

Autor: Prestel, Alexander

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51743

Dabei meint „schwache 2. Stufe", daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage ρ gäbe, so würde ρ insbesondere in $(\mathbf{R}, S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}})$ gelten. Ersetzen wir $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$ in ρ durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage ρ^* der schwachen 2. Stufe, die in $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$ gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl $n \geqslant 2$ gibt, so daß die durch Δ_n^1-Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper R_n von $\mathbf{R}$ bilden, in dem einerseits ρ^* gelten würde, der aber andererseits nicht alle $\mathbf{N}$-definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits ρ in $(R_n, S_{\mathbf{N}}^{R_n})$ gelten, andererseits ist aber $S_{\mathbf{N}}^{R_n}$ nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von GA_2.

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung $V = L$ bewiesen werden. Der Satz′ behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$ wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von GA_2 zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von GA_2 über $\mathbf{R}$ gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom C^2 der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie GA_2 ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren" hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper R eine Charakterisierung derjenigen $S_{\mathbf{N}}^{R}$ angekündigt, die Modelle von GA_2 sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T$_1$] ungelöst, nämlich, ob GA_2 eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

LITERATUR

[A] Apt, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci. 20* (1972), 347-348.

[C] Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.

[H] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.

[K] Klingenberg, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.

[M] MONTAGUE, R. Semantical closure and non finite axiomatizability I. *In: Infinitistic Methods*, Warschau 1961, 286-302.

[P-S] PRESTEL, A. and L. W. SZCZERBA. Non-axiomatizability of real general affine geometry. *Fund. Math. 104* (1979), 193-202.

[Sch] SCHWABHÄUSER, W. A class of undecidable models of general affine geometry. *Abstract, presented at the Int. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Hannover 1979.

[S-T_1] SZCZERBA, L. W. and A. TARSKI. Metamathematical properties of some affine geometries. *In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1964 Int. Congress*, Amsterdam 1965, 166-178.

[S-T_2] —— Metamathematical discussion of some affine geometries. *Fund. Math. 104* (1979), 155-192.

[S] SZMIELEW, W. Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics.* Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 30-52.

[T] TARSKI, A. What is elementary geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics.* Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 16-29.

(Reçu le 9 septembre 1980)

Alexander Prestel

Fakultät für Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 5560
West Germany