Für $r \in F^*$ hat $t^q - r$ keine mehrfachen Faktoren (in $F[t]$). Es gibt also eine auf F triviale Bewertung $\bar{v}_r$ von $F(t)$, für die $\bar{v}_r(t^q - r)$ das kleinste positive Element von $G_{\bar{v}_r}$ ist. Wir wählen für jedes r eine Fortsetzung w_r von $\bar{v}_r$ auf E_i. Dann ist $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$ für fast alle r. Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß $w_r(t^q - r') = 0$, wenn $r \neq r'$.
Wir wählen jetzt $r_1 \in F$ so, daß $r_1 \neq 0, a_n$, $2r_1 \neq a_n$ und r_1 in keiner der Mengen

$$C,\ a_n - C,\ M - B,\ a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei $r_2 = a_n - r_1$. Lemma 3 liefert uns $s_i \in F^*$ mit $s_i(t^q - r_i) \in L^q$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = \left(E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}\right).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.
Weil q $w_{r_1}(t^q - r_1)$ und $w_{r_2}(t^q - r_2)$ nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen w_{r_1}, w_{r_2}, v_s, $(s \in S_i)$. Um (4.2) zu zeigen, seien $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$, $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$ gegeben. Es ist dann z.B. für alle $s \in S_i$ $v_s(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar. Wenn auch $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ und $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B. $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ nicht q-teilbar. Dann ist $r_1 = \bar{r}_1$, $r_i \neq \bar{r}_2$ und $\bar{r}_2 \in M - r_1$. Folglich ist $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$, und alle $v_s(t^q - \bar{r}_2)$, $(s \in S_i)$, sind durch q teilbar.
Damit ist die Konstruktion von K abgeschlossen.

4) Die Eigenschaften von K

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

(5) $(K \cap L^q) \setminus K^q = (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(5′). $K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(6) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$

(6′) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in K \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$

(7) $M = \{r \in F \mid \forall\, r_1, r_2 \in F\ (r_1 \neq r_2 \,\&\, r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q$ oder $t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$

Beweis von (2): Sei $K \underset{\neq}{\subset} H \subset L$ und H endlich über K. Wir wollen zeigen, daß q den Grad $[H:K]$ teilt. Wir können $H = K(a)$ annehmen. Für beliebig große n ist $a = a_n$. Wir wählen n so groß, daß

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}] = [K(a) : K] .$$

In der Konstruktion tritt bei $i = 4n$ der Fall a) ein. Also teilt q

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}] .$$

Beweis von (5) und (5′):

„$\supset$" Sei $a \in F^* \cdot K^q$. Für alle genügend großen i ist dann $a \in F^* \cdot E_i^q$ und $v(a)$ für alle auf F trivialen v durch q teilbar. Nach (4.1) liegt a nicht in $F^* \cdot S_i$.

„$\subset$" Sei $a \in K \setminus F^* \cdot K^q$. Nach Lemma 3 wählen wir $f \in F^*$ mit $\bar{a} = af \in L^q$. Wir haben jetzt $\bar{a} \in (K \cap L^q) \setminus K^q$.

Es sei $a_n = \bar{a}$ und n so groß, daß $\bar{a} \in E_{4n+1}$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+1$ der Fall b) ein. Also ist $\bar{a} \in S_{i+1}$. Daraus folgt $a \in F^* \cdot S_{i+1}$.

Beweis von (6) und (6′):

„$\subset$" Sei $a \in F$. Für ein $b \in K$ sei $1 + b \in K^q$ und $a^q + b^{-1} \in K^q$. i sei so groß daß $1 + b \in E_i^q$ und $a^q + b^{-1} \in E_i^q$. v sei eine auf F triviale Bewertung von E_i. Wenn $v(b) > 0$, ist $v(b) = -v(a^q + b^{-1})$ durch q teilbar. Wenn $v(b) < 0$, ist $v(b) = v(1+b)$ durch q teilbar. Weil also $v(b)$ immer durch q teilbar ist, ist nach (4) $b \notin F^* \cdot S_i$. (5′) ergibt $b \in F^* \cdot K^q$. Wenn $b \in L^q$, folgt aus (5), daß $b \in K^q$.

„$\supset$" Sei $a \in K \setminus F$. n sei so groß, daß $a \in E_{4n+2}$, und es sei $a = a_n$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+2$ der Fall b) ein. In S_{i+1} gibt es dann ein b mit $1 + b,\ a^q + b^{-1} \in E_{i+1}^q$. Wir haben also

$$b \in L^q,\ 1 + b \in K^q,\ a^q + b^{-1} \in K^q,\ b \notin F^* \cdot K^q .$$

Beweis von (7):

„$\subset$" Sei $r_1 + r_2 \in M$, $r_1 \neq r_2$. Wenn die $t^q - r_1$ beide nicht in $F^* \cdot K^q$ sind, ist nach (5′) $t^q - r_1,\ t^q - r_2 \in F^* . S_i$ für genügend großes i. Das widerspricht aber (4).

„$\supset$" Sei $r = a_n \in F \setminus M$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n + 3$ der Fall b) ein. Es gibt dann $r_1 \neq r_2 \in F$, $r_1 + r_2 = r$ und $s_i \in F^*$, für die $s_1(t^q - r_1),\ s_2(t^q - r_2) \in S_{i+1}$. Also nach (5′) $t^q - r_1,\ t^q - r_2 \notin F^* \cdot K^q$.