

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1982)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES  
**Autor:** Robert, Alain  
**Kapitel:** 4. Partie cohomologique de la démonstration  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52234>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il est clair par construction que l'ensemble des pôles de  $p$  est  $L$ -invariant (en dimension  $n > 1$ , les diviseurs ont une dimension  $> 0$  et il n'est guère possible de sommer les translatées d'une fonction méromorphe sur  $V$  pour obtenir une fonction méromorphe sur  $V/L$ ). En particulier,  $p$  a un pôle double en chaque point du réseau  $L$ . Sa dérivée  $p'$  a un pôle triple en ces mêmes points. On peut voir que  $p$  est un quotient de deux fonctions theta de  $S_2$  et que  $p'$  est un quotient de deux fonctions de  $S_3$ . Une base de  $S_2$  a d'ailleurs deux éléments et fournit une application projective sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , donc sur la sphère de Riemann. Cette application identifie les points  $z$  et  $-z$  et est un revêtement (les quatre points de  $\frac{1}{2}L/L$  étant ramifiés).

Toujours dans le cas  $n = 1$ , montrons comment la fonction theta de Riemann s'apparente aux fonctions theta de Jacobi. La série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \quad (q \in \mathbf{C})$$

converge pour  $|q| < 1$ . Son carré est

$$\sum q^{n^2+m^2} = \sum_{N \geq 0} c_N q^N$$

où  $c_N$  dénote le nombre de couples  $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $n^2 + m^2 = N$ . De même, la puissance quatrième de  $\sum q^{n^2}$  est la fonction génératrice du nombre de représentations d'un entier positif comme somme de quatre carrés parfaits. Pour calculer ces fonctions, Jacobi a posé  $q = e^{i\pi\tau}$  ( $\text{Im } \tau > 0 \Rightarrow |q| < 1$ )

$$\theta(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}.$$

Plus généralement, il étudie les fonctions

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z}$$

dont la précédente est la valeur en  $z = 0$  (theta nullwert). La série de Fourier de Riemann est donc exactement de ce type:  $L = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$ ,  $L_1 = \mathbf{Z}$ ,  $L_2 = \tau\mathbf{Z}$ .

#### 4. PARTIE COHOMOLOGIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous allons démontrer ici que si le tore complexe  $V/L$  est une variété abélienne, il existe un produit scalaire hilbertien sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ . L'idée de la démonstration est simple. Partant d'un plongement projectif

$$i: V/L \rightarrow \mathbf{P}^m,$$

l'image en cohomologie d'un générateur  $c_1$  de  $H^2(\mathbf{P}^m)$  fournit une classe de cohomologie  $i^*(c_1)$  de degré 2 du tore. Prenant l'interprétation de de Rham des groupes de cohomologie, il y a dans la classe  $i^*(c_1)$  une unique 2-forme différentielle *harmonique* (ou de façon équivalente ici *invariante par translations*) dont la restriction à l'origine fournit la 2-forme alternée  $E = \text{Im}(H)$  (on a vu dans la sec. 2 que la partie imaginaire d'une forme hermitienne détermine cette dernière univoquement). Pour mener à bien ce programme, il est nécessaire de calculer la cohomologie des espaces projectifs et des tores complexes. On pourra montrer ensuite que si

$$A = V/L, \omega = \text{représentant harmonique de } c_1, E = \omega_{\text{origine}},$$

alors

$$\omega \in H^{(1,1)}(A) \subset H^2(A, \mathbf{C}) \Rightarrow E(iu, iv) = E(u, v),$$

$$\omega \in H^2(A, \mathbf{Z}) \Rightarrow E \text{ entière sur } L \times L,$$

$$\omega \text{ positive} \Rightarrow E \text{ positive (i.e. } E(u, iu) > 0 \text{ si } u \neq 0).$$

PROPOSITION. *L'homologie entière d'un espace projectif complexe  $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$  est donnée comme suit*

$$\begin{cases} H_{2i}(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} & \text{pour } i = 0, 1, \dots, m \\ H_{2i+1}(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = 0 & \text{pour } i \text{ entier.} \end{cases}$$

*Démonstration.* L'espace  $\mathbf{P}^m$  est défini par quotient de  $\mathbf{C}^{m+1} - \{0\}$ . La classe de  $(z_0, z_1, \dots, z_m)$  sera dénotée par  $[z_0, z_1, \dots, z_m]$  (coordonnées homogènes dans l'espace projectif). On a un plongement

$$\mathbf{C}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^m \text{ donné par } (z_1, \dots, z_m) \mapsto [1, z_1, \dots, z_m].$$

Le complémentaire de l'image (l'hyperplan à l'infini d'équation  $z_0 = 0$ ) s'identifie naturellement à l'espace projectif  $\mathbf{P}^{m-1}$  par les coordonnées  $[z_1, \dots, z_m]$ . Ainsi on obtient la décomposition

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{C}^m \cup \mathbf{P}^{m-1} \quad (\text{réunion disjointe}).$$

Procédant itérativement, on parviendra finalement à

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{C}^m \cup \mathbf{C}^{m-1} \cup \mathbf{C}^{m-2} \cup \dots \cup \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

C'est une décomposition cellulaire de l'espace projectif, chaque espace  $\mathbf{C}^i$  étant une cellule de dimension  $2i$  (au sens de la topologie algébrique:  $\mathbf{R}^k$  est une cellule de dimension  $k$ ). L'opérateur bord diminuant les dimensions d'une unité doit être trivial (nul en toute dimension): il n'y a pas de bord non nul et chaque cellule

fournit un générateur de l'homologie entière. Il est peut-être plus convenable de se représenter les générateurs de l'homologie comme adhérences des cellules précédentes

$$\overline{C^i} = C^i \cup C^{i-1} \cup \dots \cup C \cup \{\infty\} \quad (\subset \mathbf{P}^m).$$

Par exemple, un générateur de  $H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z})$  est donné par la droite projective  $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^m$  (toutes les droites projectives sont homologues dans  $\mathbf{P}^m$ ), et cette droite projective s'identifie, avec sa structure analytique à la sphère de Riemann  $C \cup \{\infty\}$ .

Comme nous travaillerons finalement avec des formes différentielles, donnons une 2-forme dont la classe dans  $H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C})$  est duale du 2-cycle entier défini par la cellule  $C$  (ou son adhérence  $\mathbf{P}^1$ ) de  $\mathbf{P}^m$ .

Dénotons par  $\pi$  la projection canonique  $\mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^m$  contractant les droites homogènes (complexes) en des points. Lorsque  $\sigma$  est une section holomorphe de  $\pi$  définie dans un ouvert  $U \subset \mathbf{P}^m$  (il y a de telles sections dès que  $U$  est simplement connexe, par exemple si  $U$  est un ouvert affine principal  $U_i$  défini par  $z_i \neq 0$ )

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \\ & \searrow \pi & \\ & & \mathbf{P}^m \end{array} \quad \pi \circ \sigma = id_U,$$

on peut calculer la 2-forme (à valeurs complexes) sur  $U$

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2.$$

Ici, la norme utilisée est la norme canonique de  $\mathbf{C}^{m+1}$

$$\|z\|^2 = \|(z_i)\|^2 = \sum_{0 \leq i \leq m} |z_i|^2$$

(elle dérive du produit scalaire hermitien canonique sur  $\mathbf{C}^{m+1}$ ) et les opérateurs  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  sont fournis par la structure complexe (de  $U$ ): en coordonnées, la différentielle extérieure  $d$  de de Rham s'écrit

$$\sum_i (\partial/\partial z_i) dz_i \wedge + \sum_i (\partial/\partial \bar{z}_i) d\bar{z}_i \wedge = \partial + \bar{\partial}.$$

On vérifie sans peine que  $\omega_U$  est indépendante du choix de section holomorphe  $\sigma$  sur  $U$ : tout autre choix doit être de la forme  $\sigma' = f\sigma$  où  $f$  est une fonction (scalaire) holomorphe sur  $U$  et ne s'annulant pas. Ainsi

$$\partial \bar{\partial} \log \|\sigma'\|^2 = \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 + \partial \bar{\partial} \log |f|^2.$$

Localement, choisissant des branches convenables de logarithmes complexes, on peut écrire  $\log |f|^2 = \log f + \log \bar{f}$  et donc

$$\partial\bar{\partial} \log |f|^2 = \partial\bar{\partial}(\log f + \log \bar{f}) \quad (\text{localement}).$$

Mais  $\log f$  étant holomorphe,  $\bar{\partial} \log f = 0$  et  $\partial\bar{\partial} \log f = 0$ . De plus,

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial \quad (\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0)$$

implique de même

$$\partial\bar{\partial} \log \bar{f} = -\bar{\partial}\partial \log \bar{f} = -\bar{\partial}(0) = 0.$$

Choisissant un recouvrement  $(U_i)$  de  $\mathbf{P}^m$  par des ouverts sur lesquels il existe de telles sections holomorphes  $\sigma_i$  de  $\pi$  (par exemple les ouverts affines  $U_i: z_i \neq 0$ ), les 2-formes  $\omega_i$  correspondantes doivent se recoller

$$\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_j \cap U_i}$$

(d'après l'indépendance du choix des sections choisies pour les calculer) et fournir une 2-forme globale  $\omega$  bien définie sur tout  $\mathbf{P}^m$ . C'est la 2-forme de Fubini-Study.

**PROPOSITION.** *La 2-forme de Fubini-Study est fermée, invariante par l'action du groupe unitaire de  $\mathbf{C}^{m+1}$ , de classe de cohomologie entière. Plus précisément, la classe de cohomologie de la forme de Fubini-Study dans  $H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C})$  est la duale du générateur  $[\mathbf{P}^1] \in H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z})$ .*

*Démonstration.* On a

$$(\partial + \bar{\partial})(\partial - \bar{\partial}) = \partial^2 - \bar{\partial}^2 + \bar{\partial}\partial - \partial\bar{\partial} = -2\partial\bar{\partial},$$

d'où

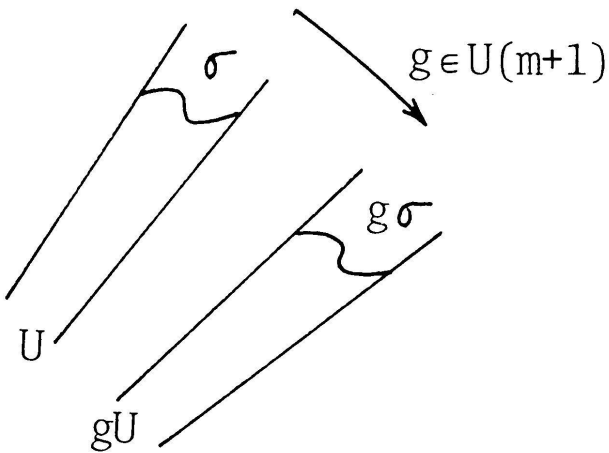
$$\partial\bar{\partial} = -\frac{1}{2}d(\partial - \bar{\partial}).$$

Ainsi

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 = -\frac{i}{4\pi} d(\partial - \bar{\partial}) \log \|\sigma\|^2,$$

$$\omega_U = d\eta \Rightarrow d\omega_U = 0 \quad (\text{pour les } U = U_i \text{ recouvrant } \mathbf{P}^m)$$

d'où  $\omega$  fermée. Pour démontrer l'invariance de  $\omega$  par le groupe unitaire  $U(m+1)$  de  $\mathbf{C}^{m+1}$ , prenons une transformation  $g \in U(m+1)$ . Pour une section holomorphe  $\sigma$  de  $\pi$  définie sur un ouvert  $U$ , on pourra choisir la section  $g\sigma$  de  $\pi$  sur l'ouvert  $gU$ .



On a par définition

$$g\sigma(gz) = \sigma(z) \quad (z \in U),$$

d'où

$$\|g\sigma(gz)\| = \|\sigma(z)\|.$$

Lorsque \$z\$ et \$gz\$ appartiennent à \$U\$, on a ainsi

$$\|\sigma(gz)\| = \|\sigma(z)\|.$$

L'invariance de \$\omega\$ en résulte.

L'intégralité de la classe de cohomologie \$[\omega]\$ de \$\omega\$ résultera de la formule plus précise

$$\int_c \omega = 1, \quad c = \text{classe d'une droite dans } H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}).$$

En effet, le groupe \$H\_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}c\$ est de rang 1. Pour calculer l'intégrale proposée, il faut passer en coordonnées (la formule de Stokes montre que cette intégrale est indépendante du représentant choisi dans la classe \$c\$ car \$\omega\$ est fermée, et ne changerait d'ailleurs pas non plus par adjonction d'une forme exacte à \$\omega\$ car \$c\$ est fermée). Sur l'ouvert affine \$U = U\_0\$ (défini par \$z\_0 \neq 0\$, cet ouvert est dense) nous prendrons naturellement la section (holomorphe!) \$\sigma\$ de \$\pi\$ donnée par

$$z = [z_0, \dots, z_m] \mapsto (1, z_1/z_0, \dots, z_m/z_0).$$

On peut même choisir l'expression des points de cet ouvert ayant \$z\_0 = 1\$. On a donc

$$\begin{aligned} \|\sigma(z)\|^2 &= 1 + \sum z_i \bar{z}_i, \\ \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 &= \sum z_i d\bar{z}_i / (1 + \sum \dots), \\ \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 &= \sum \partial \left( \frac{z_i}{1 + \sum} \right) \wedge d\bar{z}_i \\ &= \sum_i \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{1 + \sum} - \sum_{i,j} \frac{z_i \bar{z}_j dz_j \wedge d\bar{z}_i}{(1 + \sum)^2} \end{aligned}$$

La restriction à la droite \$z\_1 = z, z\_i = 0 (i \geq 2)\$ donne

$$\frac{2\pi}{i} \omega \Big|_{\text{axe } z_1 = z} = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Mais  $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2i dx \wedge dy$  de sorte que

$$\int_c \omega = \frac{i}{2\pi} \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = -2i \frac{i}{2\pi} \int \frac{dx \wedge dy}{(1 + |z|^2)^2}.$$

On passe en coordonnées polaires  $\iint dx dy \dots = \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \dots$  et on trouve

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{2r dr}{(1 + r^2)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{d\rho}{(1 + \rho)^2} = -\frac{1}{1 + \rho} \Big|_0^\infty = 1. \end{aligned}$$

Nous aurons encore besoin de savoir que la 2-forme de Fubini-Study est *positive*. Puisqu'elle est invariante par le groupe transitif  $U(m+1)$ , il suffit de voir qu'elle est positive en un point, disons l'origine  $[1, 0, \dots, 0] \in \mathbf{P}^m$ . Ce point appartient bien à la carte affine  $U_0(z_0 \neq 0)$  dans laquelle nous avons donné une expression explicite de  $\omega$ :

$$\omega_{\text{origine}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{1 \leq i \leq m} (dz_i \wedge d\bar{z}_i)_{\text{origine}}.$$

Rappelons-nous que  $dz_i$  est le champ constant de formes linéaires (complexes) coordonnées de sorte que  $(dz_i)_{\text{origine}} = f_i$  et similairement  $(d\bar{z}_i)_{\text{origine}} = \bar{f}_i$  (complexe conjuguée de  $f_i$ : elle est antilinéaire). On a donc

$$\omega_{\text{origine}} = \frac{i}{2\pi} \sum (f_i \otimes \bar{f}_i - \bar{f}_i \otimes f_i)$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{\text{origine}}(u, iu) &= \frac{i}{2\pi} \sum (f_i(u) \overline{f_i(iu)} - \overline{f_i(u)} f_i(iu)) \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum (u_i \overline{(iu)_i} - \overline{u_i} (iu)_i) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum \overline{u_i} u_i > 0 \quad \text{si } u \neq 0. \end{aligned}$$

(La seule difficulté de ce calcul consiste à ne pas confondre l'indice de sommation  $i$  variant de 1 à  $m$  et  $i = \sqrt{-1}$  ...).

Observons encore que la 2-forme de Fubini-Study  $\omega$  est de *type* (1, 1) au sens de Hodge. Comme

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{(2, 0)} \oplus H^{(1, 1)} \oplus H^{(0, 2)},$$

$$H^{(0, 2)} = \text{conjugué de } H^{(2, 0)} \text{ (donc de même dimension!)}$$

on a toujours  $\dim_{\mathbf{C}} H^2(X, \mathbf{C}) = \dim_{\mathbf{C}} H^{(1, 1)} + 2 \dim_{\mathbf{C}} H^{(2, 0)}$  et dans notre cas,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C}) = 1 \Rightarrow H^{(2, 0)} = H^{(0, 2)} = 0.$$

Plus simplement, on remarque que l'expression explicite de  $\omega$  dans une carte ne fait intervenir aucune expression  $dz_i \wedge dz_j$  ni  $d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j$  mais seulement des  $dz_i \wedge d\bar{z}_j$ . En tout point  $a \in \mathbf{P}^m$ , on a donc

$$\omega_a(iu, iv) = \omega_a(u, v).$$

On peut passer à la considération de la restriction de la 2-forme de Fubini-Study à la variété abélienne plongée projectivement

$$i: A = V/L \hookrightarrow \mathbf{P}^m$$

$$i^*\omega \leftarrow \omega \quad (\text{Fubini-Study}).$$

Nous étudierons cette restriction par introduction de coordonnées réelles  $(x_j)_{1 \leq j \leq 2n}$  sur  $V$  obtenues en choisissant une base de  $L$ . Nous identifierons cette 2-forme à une 2-forme  $\mathbf{Z}^{2n}$ -périodique sur  $\mathbf{R}^{2n}$

$$\tilde{\omega} = \sum_{j, k} a_{jk} dx_j \wedge dx_k \quad ((a_{jk}) \text{ antisymétrique})$$

avec coefficients lisses  $a_{jk} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n})$ . Comme  $\tilde{\omega}$  est fermée, on doit avoir

$$0 = d\tilde{\omega} = \sum_{j, k} da_{jk} \wedge dx_j \wedge dx_k$$

$$= \sum_{j, k, p} (\partial a_{jk} / \partial x_p) dx_p \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

En regroupant les termes semblables, on trouve les relations de *cocycle*

$$\partial^i a_{jk} + \partial^j a_{ki} + \partial^k a_{ij} = 0 \quad (\partial^p = \partial / \partial x_p).$$

Développons alors en série de Fourier ces coefficients  $a_{jk}$ :

$$a_{jk}(x) = \sum a_{jk}(l) e^{2\pi i l \cdot x}$$

(l'indice  $l$  parcourt le réseau entier  $\mathbf{Z}^{2n}$  et  $l \cdot x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots$ ).



LEMME. La 2-forme  $\tilde{\omega}$  est cohomologue à la 2-forme

$$\sum a_{jk}(0) dx_j \wedge dx_k.$$

Cette dernière forme (à coefficients constants) n'est rien d'autre que la forme moyenne de  $\tilde{\omega}$ : elle est invariante par translations. C'est aussi le représentant harmonique de la classe de cohomologie définie par  $\tilde{\omega}$  sur le tore réel  $\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$ .

*Preuve du lemme.* Il suffit de construire une primitive de la 2-forme

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j,k} (a^{jk} - a_{jk}(0)) dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{j,k,l \neq 0} a_{jk}(l) e^{2\pi i l x} dx_j \wedge dx_k. \end{aligned}$$

On cherche donc une forme

$$\Omega = \sum_i A_i dx_i = \sum_i \sum_l A_i(l) e^{2\pi i l x} dx_i$$

telle que

$$d\Omega = \sum_{j,k,l \neq 0} a_{jk}(l) e^{2\pi i l x} dx_j \wedge dx_k.$$

Comme toutes les fonctions considérées sont lisses, les développements de Fourier considérés sont rapidement convergents (suites de coefficients  $a_{jk}(l) \rightarrow 0$  plus vite que  $\|l\|^{-p}$  pour tout entier  $p \in \mathbf{N}$  lorsque  $\|l\| \rightarrow \infty$ ) il est légitime de dériver ces séries terme à terme et on trouve les conditions

$$l_i A_j(l) - l_j A_i(l) = a_{ij}(l) \quad (l \neq 0).$$

Choisissant un indice  $i$  avec  $l_i \neq 0$  et le coefficient  $A_i(l)$  arbitraire, on posera pour  $j \neq i$

$$A_j(l) = (l_j A_i(l) + a_{ij}(l)) / l_i.$$

Il résulte immédiatement des conditions de cocycle pour le système des  $a_{ij}$  que ces  $A_j(l)$  satisfont bien toutes les conditions imposées, et le lemme est ainsi démontré.

Dénotons par

$$\omega^* = \sum_{j < k} a_{jk}(0) dx_j \wedge dx_k$$

cette forme moyenne. Elle est de classe entière

$$[\omega^*] = [i^* \omega] \in H^2(A, \mathbf{Z})$$

comme image réciproque de la classe entière de la forme de Fubini-Study. Son

intégrale sur un 2-cycle entier (surface fermée) de  $A$  doit donner un entier. Prenons en particulier les 2-cycles donnés par la paramétrisation

$$c_{\lambda\mu}: [0, 1]^2 \rightarrow A = V/L \quad (\lambda, \mu \in L) \\ (s, t) \mapsto s\lambda + t\mu \pmod{L}$$

(lorsque  $\lambda$  est non proportionnel à  $\mu$ , l'image du cycle  $c_{\lambda\mu}$  est un tore usuel —  $\dim_{\mathbf{R}} = 2$  — immergé dans  $A$ : c'est même un tore plongé dans  $A$  si  $\{\lambda, \mu\}$  est contenu dans une base de  $L$ ). On doit donc avoir

$$\int_{c_{\lambda\mu}} \omega^* \quad \text{entier (pour } \lambda, \mu \in L \text{)} .$$

Utilisant la paramétrisation donnée pour calculer ces intégrales, on trouve (tenant compte du fait que le champ de formes bilinéaires  $\omega^*$  est constant)

$$\int_{c_{\lambda\mu}} \omega^* = \omega_{\text{origine}}^*(\lambda, \mu) \int_0^1 \int_0^1 ds dt = E(\lambda, \mu)$$

avec

$$E = \omega_{\text{origine}}^* \text{ (forme } \mathbf{R}\text{-bilinéaire alternée)} .$$

C'est la propriété d'*intégralité* souhaitée sur  $L \times L$ . Pour conclure la démonstration, il reste à voir que  $E$  est *positive* et invariante par multiplication simultanée des arguments par  $i$  (*type* (1, 1)). Comme la valeur à l'origine de la 2-forme  $\omega^*$  est obtenue par moyenne (relativement à la mesure de Haar normalisée du groupe  $V/L$ , c'est aussi l'image de la mesure de Lebesgue, identifiant  $V$  à  $\mathbf{R}^{2n}$  par choix d'une base de  $L$ ), des formes  $\mathbf{R}$ -bilinéaires alternées positives

$$\omega_a \quad (a \in A, \omega: \text{2-forme de Fubini-Study}),$$

la positivité de  $E$  est évidente. Cette opération de moyenne ne change pas non plus le type (elle ne touche que les coefficients des formes  $dx_j \wedge dx_k$ , pas les  $dx_j \wedge dx_k$  elles-mêmes)

$$E(u, v) = \omega_{\text{origine}}^*(u, v) = \int_{A \subset \mathbf{P}^m} \omega_a(u, v) da$$

et  $\omega_z(iu, iv) = \omega_z(u, v)$  (pour tout  $z \in \mathbf{P}^m$ ) implique  $E(iu, iv) = E(u, v)$ .