Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1982)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE PRÉSENTATION ADÉLIQUE DE LA SÉRIE SINGULIÈRE ET DU PROBLÈME DE WARING

Autor: Lachaud, Gilles

Kapitel: Chapitre I. La transformation de Gauss

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52235

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour les formes de degré supérieur la série singuliére à été étudiée dans le cadre adélique par T. Ono [7] et J. I. Igusa [5], [6]. Leurs conclusions sont rassemblées dans le chapitre I. On pouvait penser qu'il était possible d'établir dans ce cadre le résultat de Hardy et Littlewood : c'est ce que nous avons fait au chapitre II, en reprenant la *méthode du cercle* adaptée ici au cercle adélique $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et en utilisant la Formule de Poisson comme le suggèrent naturellement les expressions de $S_{\mathbf{A}}(t)$ et de $N(t)$.

Nous espérons que l'approche que nous présentons ici permettra de traiter le problème de Waring avec plus d'aisance dans le cas des autres corps adéliques, qu'il s'agisse des corps de nombres algébriques ou des corps de fonctions, et aussi dans d'autres cas que celui de la forme de Fermat.

J'ajoute que cet article est résumé dans [11], et que les résultats de [1] utilisés ici sont repris dans le livre [12], qui vient de paraître au moment de la publication de ce volume.

Je tiens à remercier J. P. Serre pour l'intérêt qu'il a montré pour le présent travail, et aussi pour m'avoir communiqué deux lettres que P. Deligne lui a adressées (datées des 14 et 17 novembre 1971); J. J. Sansuc, de qui j'ai appris l'existence du mémoire [10] après la rédaction du présent article; et R. Danset pour sa lecture attentive du manuscrit.

Chapitre I. La transformation de Gauss

1. Définitions. Notons P l'ensemble des nombres premiers, $|x|_p$ la valeur absolue p-adique du nombre $x \in \mathbf{Q}$, et $|x|_0$ sa valeur absolue archimédienne. L'ensemble $\overline{P} = P \cup \{0\}$ est l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$. Nous noterons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$.

Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, écrivons

$$(1) \qquad x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n p^n \quad \text{avec} \quad x_n \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

(somme qui ne comporte qu'un nombre fini de termes d'indice négatif non nuls) et posons

$$(2) \qquad < x > = \sum_{n<0} x_n \, p^n ;$$

on a

$$x = < x > + [x],$$

avec $< x > \in \mathbf{Q}, 0 \leqslant < x > < 1, [x] \in \mathbf{Z}_p$.

Le caractère de Tate χ_p de $\mathbf{Q}_p$ est défini par la relation

$$\chi_p(x) = \exp(+2i\pi < x >).$$

D'autre part, si $x \in \mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}$, on pose

$$\chi_0(x) = \exp(-2i\pi x).$$

Rappelons que si $p \in P$, l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$ est constitué des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbf{Q}_p^n$; si $p = 0$, l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, et l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$ des *fonctions standard* sur $\mathbf{A}^n$ est constitué des combinaisons linéaires de fonctions:

(3) $$\phi(x) = \prod_{p \in \bar{P}} \phi_p(x_p),$$

lorsque $x = (x_p) \in \mathbf{A}$, où $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, où $\phi_p \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, et où de plus ϕ_p est égale à la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout $p \in P$ sauf un nombre fini d'entre eux.

Si $x = (x_p) \in \mathbf{A}$, on pose

(4) $$\chi(x) = \prod_{p \in \bar{P}} \chi_p(x_p);$$

la fonction χ est le *caractère de Tate (global) de* $\mathbf{A}$.

2. La transformation de Gauss. Soit F une forme entière à n variables et de degré d, c'est-à-dire un polynôme homogène $F \in \mathbf{Z}[X_1, ..., X_n]$ de degré d, et soit ϕ une fonction standard sur $\mathbf{A}^n$. *La transformée de Gauss (pour la forme* F*) de la fonction* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$ est définie par la relation

(5) $$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \phi(x)\, \chi(\xi F(x))\, dx$$

où la mesure dx sur $\mathbf{A}^n$ est la mesure de Haar telle que

$$dx = \prod_{p \in \bar{P}} dx_p,$$

en prenant pour dx_0 la mesure de Lebesgue et pour dx_p la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p^n$ telle que $\mathbf{Z}_p^n$ soit de mesure 1.

Pour montrer que cette intégrale converge, on peut supposer que ϕ est décomposable, c'est-à-dire de la forme donnée dans la relation (3); dans ce cas la fonction $G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi)$ est égale à un produit d'intégrales locales:

(6) $$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \prod_{p \in \bar{P}} G_p(\phi_p, \xi_p),$$

avec, pour $p \in \overline{P}$, et $\xi \in \mathbf{Q}_p$,

$$(7) \qquad G_p(\phi_p, \xi) = \int_{\mathbf{Q}_p^n} \phi_p(x)\, \chi_p(\xi F(x))\, dx\,.$$

3. Les places ultramétriques. Nous allons étudier les intégrales (7) dans le cas où p est un nombre premier, et où ϕ_p est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$; on posera alors $G_p(\phi_p, \xi) = G_p(\xi)$ pour $\xi \in \mathbf{Q}_p$; si $|\xi - \eta| \leqslant 1$, alors $G_p(\xi) = G_p(\eta)$.

Si $q = p^e$ avec $e \geqslant 1$, et si $z \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on définit la *somme de Gauss* de F en z par la relation

$$(8) \qquad \gamma_q(F, z) = \gamma_q(z) = q^{-n} \Sigma \;\; \chi_q(z\tilde{F}(x))\,,$$

où x parcourt l'ensemble $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n$, où on a noté $\tilde{F}$ la réduction modulo q de F, et où on a posé

$$\tilde{\chi}_q(\tilde{x}) = \chi_p(q^{-1}x)$$

pour $x \in \mathbf{Z}_p$, en notant $\tilde{x}$ l'image de x dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Il est clair que $|\gamma_q(z)| \leqslant 1$, et que $\gamma_q(0) = 1$. Nous renvoyons à [7], Ch. I, § 2 et § 3, pour la démonstration du résultat suivant:

Théorème 1.1. *Avec les notations précédentes, supposons* $\xi \in \mathbf{Z}_p$ *et* $q = p^e$ *avec* $e \geqslant 1$; *on a alors*

$$G_p(q^{-1}\xi) = \gamma_q(\tilde{\xi})\,.$$

Posons maintenant, si K est un corps et si F est une forme à coefficients dans K:

$$\Delta_K(F) = \{x \in K^n \mid dF(x) = 0\}\,.$$

La relation d'Euler implique que si le degré de F est premier à la caractéristique de K, l'ensemble algébrique $\Delta_K(F)$ est inclus dans le cône d'équation $F = 0$.

Définition 1.2. On dit que la forme F est *fortement non-dégénérée sur* K si $\Delta_K(F) = \{0\}$.

Si la forme F est définie sur $\mathbf{Z}$, on pose $\Delta_p(F) = \Delta_K(F)$ si $K = \mathbf{Q}_p$; on pose aussi $\tilde{\Delta}_p(F) = \Delta_K(F)$ si $K = \mathbf{F}_p$ et si $\tilde{F}$ est la réduction modulo p de F. On pose encore, si F est une forme de degré d,

$$\Sigma(F) = \{p \in P \mid p \mid d \quad \text{ou} \quad \tilde{\Delta}_p(F) \neq 0\}\,;$$

si F est fortement non-dégénérée sur $\mathbf{Q}$, l'ensemble $\Sigma(F)$ est fini. Enfin, pour tout entier $d \geqslant 3$, on pose

$$\Sigma(d) = \{p \in P \mid p \leqslant (d-1)^6\}.$$

THÉORÈME 1.3. *Supposons* $n > d \geqslant 3$, *et la forme* F *fortement non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$. *Soit* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$; *alors si* $\xi \in \mathbf{Q}_p$ *et si* $|\xi|_p > 1$, *on a*

$$|G_p(\phi, \xi)| \leqslant C_p |\xi|^{-(n/d)}$$

avec $C_p = 1$ *si* ϕ *est la fonction caractéristique de* $\mathbf{Z}_p^n$ *et si* $p \notin \Sigma(d) \bigcup \Sigma(F)$.

Donnons quelques indications sur la démonstration de ce résultat. Igusa a établi l'inégalité figurant dans le théorème pour tout p et toute $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, avec une constante C_p qui peut être éventuellement > 1, en utilisant sa théorie des développements asymptotiques et le principe de résolution des singularités, qui est explicite dans le cas des formes fortement non-dégénérées. Nous renvoyons pour cela à [5], Corollary to Theorem 1, et [6], chapter III, § 5, relation (106). D'autre part, si $|\xi|_p = q > 1$ et si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p$, le théorème 1.1. montre que

$$G_p(\phi, \xi) = G_p(\xi) = q^{-1} \sum_{x \bmod q} \chi_p(\xi F(x));$$

si on pose $<\xi>_p = a/q$, on en déduit, par définition du caractère de Tate, que

$$G_p(\xi) = q^{-1} \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi a F(x)/q). \tag{9}$$

Par ailleurs, on dispose du résultat suivant, démontré par Deligne (cf. [2], Théorème 8.4. et [8], Corollaire 6.3.):

THÉORÈME 1.4. *Si* $(a, p) = 1$ *et si* $p \notin \Sigma(F)$, *alors*

$$\Big|\sum_{x \bmod p} \exp(2i\pi a F(x)/p)\Big| \leqslant (d-1)^n p^{n/2}.$$

Puisque $d \geqslant 3$, on a

$$(d-1)^n p^{n/2} \leqslant C_p p^{n(1-(1/d))},$$

avec $C_p = (d-1)^n p^{-(n/6)}$; on déduit donc du théorème 1.3. et de la relation (9) que l'on a

$$|G_p(\xi)| \leqslant C_p p^{-(n/d)}$$

pour $p \notin \Sigma(F)$, avec $C_p = 1$ si $p \notin \Sigma(d)$. On passe de là au cas où $|\xi|_p = p^e$ avec $e > 1$ par la méthode usuelle de réduction: cf. [5], lemma 1 et lemma 2.

Remarque. Supposons que F soit la *forme de Fermat:*

$$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d$$

Celle-ci est fortement non dégénérée sur $\mathbf{Q}_p$ quel que soit p, et $\tilde{F}$ est fortement non-dégénérée sur $\mathbf{F}_p$ si p ne divise pas d. Pour cette forme, il est possible d'établir l'inégalité du théoreème 1.3. par des moyens « élémentaires ». En effet, posons

$$g_p(\xi) = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi_p(x^d \xi)\, dx\,; \tag{10}$$

on a alors

$$G_p(\xi) = g_p(\xi)^n\,; \tag{11}$$

là encore, si $|\xi|_p = q > 1$, on voit que

$$g_p(\xi) = \sum_{x \bmod q} \chi_p(\xi x^d)\,;$$

et si $<\xi>_p = a/q$, il vient donc

$$g_p(\xi) = \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi a x^d/q)\,;$$

et le résultat suivant est aisé à établir (cf. [1], Lemma 12):

Proposition 1.5. *Si* $(a, p) = 1$ *et si* $r = (d, p-1)$, *alors*

$$\Big| \sum_{x \bmod p} \exp(2i\pi a x^d/p) \Big| \leqslant (r-1)\, p^{1/2}\,.$$

On déduit donc de la proposition 1.5. que si p ne divise pas d, on a la relation

$$|g_p(\xi)| \leqslant C_p\, p^{-(1/d)}$$

lorsque $|\xi|_p = p$, avec $C_p \doteq 1$ si $p \notin \Sigma(d)$; enfin, des calculs élémentaires et la méthode usuelle de réduction (cf. [1], Lemmas 13, 14 et 15) permettent d'établir la

Proposition 1.6. *Avec les notations précédentes, on a*

$$|g_p(\xi)| \leqslant C_p\, |\xi|_p^{-1(1/d)}\,,$$

où $C_p = 1$ *si* $p \notin \Sigma(d)$.

Vu la relation (10), la proposition 1.6. implique l'inégalité figurant dans le théorème 1.3. pour la forme de Fermat.

Les résultats précédents impliquent le

COROLLAIRE 1.7. *Si $n > d$, alors la fonction $G_p(\phi, \xi)$ est intégrable sur $\mathbf{Q}_p$.*

Posons maintenant, pour $\xi \in \mathbf{A}$,

$$Q(\xi) = \prod_{p \in P} \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p), \tag{12}$$

de telle sorte que $Q(\xi)$ ne dépend que de la projection de ξ sur l'espace $\mathbf{A}_f$ dès *adèles finis* (rappelons que $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$). Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$, posons

$$G_f(\phi, \xi) = \prod_{p \in P} G_f(\phi_p, \xi_p)$$

pour $\xi \in \mathbf{A}_f$.

COROLLAIRE 1.8. *Supposons F fortement non-dégénérée sur Q_p pour tout $p \in P$. Alors*

$$G_f(\xi) \ll Q(\xi)^{-(n/d)};$$

en particulier, la fonction $G_f(\phi, \xi)$ est intégrable sur $\mathbf{A}_f$ lorsque $n > 2d$.

Démonstration. Si $|\xi|_p \leqslant 1$, et si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, la relation (7) montre immédiatement que $G_p(\phi, \xi_p) = 1$. Ceci, joint au Théorème 1.3., implique donc que l'on a

$$|G_p(\phi, \xi_p)| \leqslant C_p \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-(n/d)}$$

avec $C_p = 1$ pour presque tout $p \in P$; il s'ensuit que

$$|G_f(\xi)| \leqslant \Big(\prod_{p \in P} C_p\Big) Q(\xi)^{-(n/d)}.$$

Pour prouver la dernière assertion du corollaire, écrivons

$$\int_{\mathbf{A}f} Q(\xi)^{-(n/d)} = \prod_{p \in P} \int_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-(n/d)} d\xi;$$

or

$$\int_{|\xi|_p > 1} |\xi|_p^{-s} d\xi_p = (1-p^{-1})(1-p^{1-s})^{-1} p^{1-s} \leqslant (1-2^{1-s}) p^{1-s};$$

il s'ensuit que

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-s} d\xi \leqslant 1 + Cp^{1-s},$$

avec $C = 1 - 2^{1-s}$, et donc que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-s} d\xi \leqslant \prod_{p \in P} (1 + Cp^{1-s}); \tag{13}$$

ce produit infini convergeant si $s > 2$, on voit donc que la fonction G_f est intégrable si $n > 2d$.

4. La place archimédienne. Si $p = 0$, on dispose de résultats analogues à ceux de la section précédente.

Théorème 1.9. *Supposons F fortement non-dégénérée sur* $\mathbf{R}$, *et soit* $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$. *Alors on a*

$$|G_0(\phi_o, \xi)| \leqslant C \operatorname{Max}(1, |\xi|)^{-(n/d)}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, *avec une constante* C *dépendant de* ϕ_0.

Pour démontrer le théorème 1.9., on peut utiliser le prolongement analytique de la distribution F^s, ce qui peut être effectué en résolvant les singularités de la forme F à l'origine; on renvoie encore à Igusa [5], n° 2 et [6], chapter III, §5, pour une démonstration du théorème 1.9.

Remarque. Dans le cas où F est la forme de Fermat on peut préciser les résultats comme suit.

Supposons que

$$\phi_0(x) = \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n),$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, où φ_0 est une fonction de $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, et posons

$$A(\phi_0) = \varphi_0(0)^{-d}.$$

Proposition 1.10. *Avec les notations et hypothèses précédentes, on a*

$$|G_0(\phi_0, \xi)| \leqslant C \operatorname{Max}\big(A(\phi_0), |\xi|_0\big)^{-(n/d)}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, *où la constante* C *est indépendante de* ϕ_0.

Démonstration. Posons

$$g_0(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x) \exp(-2i\pi x^d \xi)\, dx .$$

Alors on a d'une part

$$(14) \qquad | g_0(\xi) | \leqslant \int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)\, dx = \hat{\varphi}_0(0) ,$$

et d'autre part, en posant $t = x^d \xi$,

$$g_0(\xi) = d^{-1} | \xi |_0^{-(1/d)} \int \varphi_0 (t^{1/d} \xi^{-(1/d)}) \quad \exp(-2i\pi t)\, t^{(1/d)-1}\, dt ,$$

et l'intégrale de droite est majorée par l'intégrale convergente

$$I = \int \exp(-2i\pi t)\, t^{(1/d)-1}\, dt ,$$

puisque $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$. On a donc

$$(15) \qquad g_0(\xi) \ll | \xi |_0^{-(1/d)} .$$

les relations (14) et (15) impliquent donc

$$\begin{aligned} g_0(\xi) &\ll \operatorname{Min}\left(\varphi_0(0), | \xi |_0^{-(1/d)}\right) \\ &\ll \operatorname{Max}\left(A(\phi_0), | \xi |\right)^{-(1/d)} \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition 1.10, puisque

$$g_0(\xi)^n = G_0(\phi_0, \xi) .$$

Pour résumer les résultats obtenus, nous introduisons les hypothèses suivantes:

(SS 1) *On a* $n > 2d$ *et* $d \geqslant 3$;

(SS 2) *La forme* F *est non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$ *pour tout* $p \in \overline{P}$.

En regroupant les résultats obtenus pour les places ultramétriques et pour la place archimédienne, c'est-à-dire le corollaire 1.8. et le théorème 1.9., on parvient au résultat suivant:

THÉORÈME 1.11. *Sous les conditions* (SS 1) *et* (SS 2) *l'intégrale*

$$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \phi(x) \chi(\xi F(x)) \, dx$$

est convergente pour tout $\xi \in \mathbf{A}$ *et définit une fonction intégrable sur* $\mathbf{A}$.

5. LA SÉRIE SINGULIÈRE. Si $p \in \overline{P}$ et si $t \in \mathbf{Q}_p$ on pose

$$U_p(t) = \{x \in \mathbf{Q}_p^n \mid F(x) = t\};$$

Puisque F est homogène, l'hypersurface $U_p(t)$ est non singulière si $t \neq 0$. Si $x \in U_p(t)$, et si $\partial F / \partial x_k (x) \neq 0$, on pose

$$\omega_k(x) = (-1)^{k-1} (\partial F / \partial x_k)^{-1} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n ,$$

où la notation $\widehat{dx_k}$ signifie que l'on omet dx_k.

Les ω_k se recollent pour former une forme différentielle $\omega_t(x)$ de degré $n - 1$ sur $U_p(t)$, ct on a

$$\omega_t(x) \wedge dF(x) = dx; \tag{16}$$

la forme différentielle ω_t est appelée la *forme de Leray* de $U_p(t)$.

Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, et si $t \in \mathbf{Q}_p^*$, on pose

$$S_p(\phi, t) = \int_{U_p(t)} \phi(x) \, \omega_t(x) . \tag{17}$$

Si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, la fonction $S_p(t) = S_p(\phi, t)$ est appelée la *série singulière locale* de F en p.

THÉORÈME 1.12. *Soit* $p \in \overline{P}$; *si* F *est fortement non-dégénérée, la fonction* $S_p(\phi, t)$ *est intégrable sur* Q_p *et on a, pour* $\xi \in \mathbf{Q}_p$,

$$\hat{S}_p(\phi, \xi) = G_p(\phi, \xi);$$

de plus, si $n > d$ *on a*

$$\hat{G}_p(\phi, -t) = S_p(\phi, t)$$

pour $t \in \mathbf{Q}_p^*$ *et* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$.

Démonstration. La relation (16) implique que si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, on a la relation

$$\int_{F(x) \neq 0} \phi(x)\, dx = \int_{\mathbf{Q}_p^*} dt \int_{U_p(t)} \phi(x)\, \omega_t(x)\,; \tag{18}$$

puisque F est fortement non-dégénérée, l'hypersurface $U_p(0)$ est non singulière hors de l'origine, et donc de mesure nulle; ceci prouve que $S_p(\phi, t)$ est intégrable. D'autre part

$$\begin{aligned} \hat{S}_p(\phi, \xi) &= \int_{\mathbf{Q}_p^*} S_p(\phi, t)\, \chi_p(\xi t)\, dt \\ &= \int_{\mathbf{Q}_p^*} \chi_p(\xi t) \int_{U_p(t)} \phi_p(x)\, \omega_t(x) \\ &= \int_{F(x) \neq 0} \phi(x)\, \chi_p(\xi F(x))\, dx \\ &= G_p(\phi, \xi)\,, \end{aligned}$$

puisque $U_p(0)$ est de mesure nulle. Ceci établit la première relation que nous avions en vue. Enfin, le Corollaire 1.7. (si $p \in P$) ou le Théorème 1.9. (si $p = 0$) montrent que la fonction $G_p(\phi, \xi)$ est intégrable sur $\mathbf{Q}_p$ si $n > d$; la première relation que nous avons établie implique donc, via la formule d'inversion de Fourier, que l'on a

$$\hat{G}_p(\phi, -t) = S_p(\phi, t)$$

pour presque tout $t \in \mathbf{Q}_p$; mais le théorème de Lebesgue et le théorème des fonctions implicites montrent que la fonction $S_p(\phi, t)$ est continue si $t \neq 0$ (cf. [6], p. 75); ceci établit donc la seconde assertion du théorème 1.12.

Remarque 1.13. A titre d'exercice, et bien que cela ne soit pas utilisé par la suite, montrons comment on peut retrouver, lorsque F est la forme de Fermat, l'expression usuelle de la Série Singulière. La relation

$$S_p(t) = \hat{G}_p(-t)$$

se réécrit

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \int_{\mathbf{Q}_p} G_p(\xi)\, \chi_p(-t\xi)\, d\xi \\ &= 1 + \sum_{e \geqq 1} \int_{p^{-e}\mathbf{Z}^*} G_p(\xi)\, \chi_p(-t\xi)\, d\xi\,, \end{aligned}$$

puisque $G_p(\xi) = 1$ si $\xi \in \mathbf{Z}_p$ d'après le théorème 1.1.; ce théorème implique encore que l'on peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$S_p(t) = 1 + \sum_{e \geqq 1} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \gamma_{p^e}(\tilde{\eta})\, \chi_p(-tp^{-e}\eta)\, p^e d\eta$$

où $\tilde{\eta}$ est la classe de η modulo $p^e\mathbf{Z}_p$, et où γ_{p^e} est défini par la relation (8); il s'ensuit que l'on a

$$S_p(t) = 1 + \sum_{e \geqq 1} A(p^e)\,, \tag{19}$$

où on a posé, si $q = p^e$,

$$A(q) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \gamma_q(\tilde{\eta})\, \chi_p(-t\eta/q)\, q^{-1}\, d\eta\,.$$

Mais en posant $\eta = a + q\zeta$ avec $a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ et $\zeta \in \mathbf{Z}_p$, il vient immédiatement

$$A(q) = \sum_{(a,\, q) = 1} \gamma_q(a) \exp(-2i\pi ta/q)\,; \tag{20}$$

si F est la forme de Fermat, on a

$$\gamma_q(a) = \Big(q^{-1} \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi ax^d/q)\Big)^n\,, \tag{21}$$

et les relations (19), (20) et (21) donnent l'expression de la série singulière locale figurant par exemple dans [4], P.N.II et [1], [3].

Posons maintenant, si $p \in P$ et si $q = p^e$ avec $e \geqslant 1$,

$$M_q(t) = \# \{x \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n \mid \tilde{F}(x) = t\}\,.$$

PROPOSITION 1.14. *Avec les notations précédentes, si q est assez grand, on a*

$$S_p(t) = M_q(t)/q^{n-1}\,.$$

Démonstration. La fonction S_p est localement constante sur $\mathbf{Q}_p^*$ (cf. [6], p. 83); il s'ensuit que pour tout $t \neq 0$, il existe un entier e tel que

$$S_p(s) = S_p(t) \quad \text{si} \quad |s - t| \leqslant p^e = q\,;$$

soit σ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{x \leqslant \mathbf{Q}_p^n \mid |F(x) - t| \leqslant q\}\,.$$

Si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, on a alors, en vertu de la relation (18),

$$\int_{\mathbf{Q}_p^n} \sigma(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{\mathbf{Q}_p^*} ds \int_{U_p(s)} \sigma(s)\,\phi(x)\,w_s(x)$$

$$= \int_{|s-t|\leqslant q} S_{p_q}(s)\,ds = q^{-1}\,S_p(t);$$

par ailleurs

$$\int_{\mathbf{Q}_p^n} \sigma(x)\,\phi(x)\,dx = \sum_{y \bmod q} \int_{y+q\mathbf{Z}_p^n} \sigma(x)\,dx$$

$$= M_q(t) \int_{q\mathbf{Z}_p^n} dx$$

$$= q^{-n}\,M_q(t),$$

et la proposition 1.14. est donc démontrée.

PROPOSITION 1.15. *Supposons* $n > d \geqslant 3$, *et la forme* F *non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$. *On a alors pour tout* $t \in \mathbf{Q}_p$:

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant C_p^{1-(n/d)},$$

si $p \notin \Sigma(F) \cup \Sigma(d)$, *où* C *ne dépend que de* n *et* d.

Démonstration. Le théorème 1.12. affirme que $S_p(t) = \hat{G}_p(-t)$; et puisque $G_p = 1$ sur $\mathbf{Z}_p$, il s'ensuit que

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant \int_{|\xi|_p > 1} |\,G_p(\xi)\,|\,d\xi\,;$$

en invoquant le théorème 1.3., on en déduit que

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant \int_{|\xi|_p > 1} |\,\xi\,|^{-(n/d)}\,d\xi$$

$$\leqslant (1-p^{-1})\,(1-p^{1-(n/d)})^{-1}\,p^{1-(n/d)}$$

$$\leqslant (1-2^{1-(n/d)})^{-1}\,p^{1-(n/d)}$$

ce qui prouve la proposition 1.15.

COROLLAIRE 1.16. *Supposons les conditions (SS 1) et (SS 2) satisfaites et soit* ϕ *une fonction décomposable de* $\mathbf{S}(\mathbf{A}_f^n)$;

a) *le produit infini*

$$S_f(\phi, t) = \prod_{p \in P} S_f(\phi_p, t)$$

converge, et

$$S_f(\phi, t) \ll 1;$$

b) *Supposons que* $U_{\mathbf{A}}(t)$ *soit non vide si* t *est assez grand et aussi que la condition suivante soit remplie :*

(SS 3) *Pour tout* $p \in P$, *la fonction* ϕ_p *est la fonction caractéristique de* $\mathbf{Z}_p^n$.

Alors, si t *est assez grand, on a*

$$S_f(\phi, t) \gg 1 .$$

Démonstration. Le a) est une conséquence directe de la proposition 1.15. On déduit aussi de cette proposition que l'on a

$$\prod_{p \notin \Sigma'} S_p(t) \gg 1 ,$$

où Σ' est le complémentaire d'un ensemble fini. En effet, choisissons s tel que $1 < s < (n/d) - 1$; on a alors

$$1 - Cp^{-1\,(n/d)} \geqslant 1 - p^{-s}$$

pour tout $p \notin \Sigma(C)$, où $\Sigma(C)$ est un ensemble fini; si on pose

$$\Sigma' = \Sigma(C) \cup \Sigma(d) \cup \Sigma(F) ,$$

où C est la constante figurant dans l'inégalité de la proposition 1.15., on a

$$\prod_{p \notin \Sigma'} S_p(t) \geqslant \prod_{p \notin \Sigma'} (1 - p^{-s}) \gg 1 . \tag{22}$$

Par ailleurs, si $U_{\mathbf{A}}(t) \neq \emptyset$, alors $U_p(t) \neq \emptyset$ pour tout $p \in P$, et on sait que l'ensemble

$$\{x \in (\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})^n \mid \tilde{F}(x) = t\}$$

est non vide pour tout $e \geqslant 1$ si et seulement si $U_p(t)$ est non vide; la proposition 1.14. montre donc que si $U_{\mathbf{A}}(t) \neq \emptyset$, alors $S_p(t) > c$ pour tout $p \in P$, ce qui prouve que l'on a

$$\prod_{p \in \Sigma'} S_p(t) \gg 1 , \tag{23}$$

et les relations (22) et (23) établissent donc la partie b) du corollaire 1.16.

Signalons en passant le résultat suivant (cf. la démonstration du lemme 11 de [1]):

PROPOSITION 1.17. *Si F est la forme de Fermat et si n est un entier pair vérifiant $n \geqslant 4d$, alors $U_{\mathbf{A}}(t)$ est non vide.*

6. LA FORMULE GLOBALE. Le corollaire 1.16. implique que le produit des mesures $(\omega_t)_p$ sur $U_p(t)$, pour $p \in P$, définit une mesure ω_t sur l'ensemble $U_{\mathbf{A}}(t)$ des points adéliques de la variété $F(x) = t$. Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$, on pose

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t) = \int_{U_{\mathbf{A}}(t)} \phi(x)\, \omega_t(w) ;$$

le corollaire 1.16. montre que cette intégrale converge, et les théorèmes 1.11. et 1.12. impliquent le

THÉORÈME 1.18. *Si les conditions (SS 1) et (SS 2) sont satisfaites, on a*

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t) = \hat{G}_{\mathbf{A}}(\phi, -t) .$$

Supposons maintenant

(SS 4) *La forme F est anisotrope sur* $\mathbf{R}$.

Sous la condition (SS 4), l'intégrale

$$S_0(t) = \int_{U_0(t)} \omega_t(x)$$

est convergente, et il est clair que l'on a

$$S_0(t) = V_0\, t^{(n/d)-1}$$

avec

$$V_0 = \int_{U_0(1)} \omega_1(x) .$$

Posons, pour $t \in \mathbf{Z}$,

$$S_f(t) = \prod_{p \in P} S_p(t) ,$$

où $S_p(t)$ est la série singulière locale de F en p, et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t)\, S_f(t) ;$$

la fonction $S_{\mathbf{A}}(t)$ est appelée *la série singulière globale de la forme* F. Introduisons enfin une dernière condition:

(SS 5) *Il existe* $T > 0$ *telle que la fonction* $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ *soit égale à 1 sur le compact*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leqslant T\} .$$

Il vient donc immédiatement:

PROPOSITION 1.19. *Sous les conditions (SS 1) à (SS 5), on a*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

si $t \leqslant T$.

CHAPITRE II. LE THÉORÈME DE HARDY-LITTLEWOOD

Dans ce chapitre, on considère la *forme de Fermat*

(1) $$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d$$

où d est un entier pair; et on va étudier le comportement asymptotique de la suite

(2) $$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\} ,$$

lorsque $t \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini. Le théorème de Hardy-Littlewood (cf. [4], P.N. II) s'énonce *ainsi*:

THÉORÈME 2.1. *Supposons* $d \geqslant 3$ *et* $n > 2^d$. *On a alors*

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t)\left(1 + 0\,(t^{-\theta})\right)$$

lorsque t *tend vers l'infini, avec* $\theta > 0$.