

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN  
**Autor:** Preissmann, E.  
**Kapitel:** inégalités de grand crible et leurs applications  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53823>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

par E. PREISSMANN

### LES INÉGALITÉS DE GRAND CRIBLE ET LEURS APPLICATIONS

Le grand crible est une idée relativement récente, permettant par exemple de démontrer le théorème de Bombieri-Vinogradov [2] ou de montrer que pour  $n$  assez grand on a  $2n = p + P_k$  ( $p$  étant premier et  $P_k$  produit de  $k$  facteurs premiers au plus). Barban [1] a trouvé  $k = 4$ , et Chen (voir [3])  $k = 2$ .

Notons  $e(\theta) = e^{2i\pi\theta}$  et soient  $a_{M+1}, a_{M+2}, \dots, a_{M+N}$  des nombres complexes arbitraires. Posons

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha).$$

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$  des nombres réels distincts modulo 1 et posons

$$\delta = \operatorname{Min}_{\substack{r, s, n \in \mathbf{Z} \\ r \neq s}} |\alpha_r - \alpha_s - n|.$$

Une inégalité de grand crible est du type

$$(A) \quad \sum_r |S(\alpha_r)|^2 \leq C(N, \delta) \sum_n |a_n|^2$$

(vérifiée pour  $(a_n)$  et  $(\alpha_r)$  arbitraires).

Si  $R = 1$ , on trouve  $|S(\alpha_1)|^2 \leq N \cdot \sum |a_n|^2$  (inégalité de Schwarz) et si  $N = 1$ ,  $\sum_r |S(\alpha_r)|^2 = R \cdot |a_{M+1}|^2 \leq \delta^{-1} |a_{M+1}|^2$ .

On a trouvé diverses expressions de  $C(N, \delta)$  [4] mais il est surprenant qu'on ait pu réunir les deux inégalités précédentes et montrer que  $C(N, \delta) = N + \delta^{-1} - 1$  satisfait (A) [5]. Cette expression est la meilleure possible au sens suivant: pour  $R$  donné, on peut toujours obtenir l'égalité dans (A) [5]. On peut obtenir une forme un peu plus sophistiquée que (1):

Si  $\delta_r = \operatorname{Min}_{s \neq r, n \in \mathbf{Z}} |\alpha_r - \alpha_s - n|$ , alors Montgomery-Vaughan [6] [7] ont montré que

$$(B) \quad \sum_{r=1}^R |S(\alpha_r)|^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leq \Sigma |a_n|^2$$

avec  $C = \frac{3}{2}$ , inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

### LES INÉGALITÉS DE HILBERT-MONTGOMERY-VAUGHAN

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice  $R \times N$  ( $e(n\alpha_r)$ ) est inférieure ou égale à  $\sqrt{C(N, \delta)}$ . La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type  $(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s))'$  (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type  $((x_r - x_s)^{-1})'$  [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_r$  des nombres réels distincts,

$$\delta = \underset{\substack{r, s \\ r \neq s}}{\text{Min}} |x_r - x_s|, \quad \delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$$

alors quels que soient les nombres complexes  $u_1, u_2, \dots, u_R$

$$(C) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi \delta^{-1} \Sigma |u_r|,$$

$$(D) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi C \cdot \Sigma |u_r|^2 \delta_r^{-1},$$

avec  $C = \frac{3}{2}$ .

De (C) on déduit (A) avec  $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$ , et de (D) on déduit (B). Une conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à  $C$  la valeur 1 dans (D). Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

**THÉORÈME.** (D) reste vraie pour  $C = \frac{4}{3}$ .

*Notation:* Tout au long de la démonstration  $\delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$ .

**LEMME 1.** Soit  $(x_r)_0^\infty$  une suite réelle strictement croissante telle que  $x_0 = 0$ ;  $f$  une fonction de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$ , intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $f'''(x) < 0$  pour tout  $x$ . Alors