

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Boileau, Michel / Weber, Claude  
**Kapitel:** §2. Genres de Murasugi et de Seifert des entrelacs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Finalement, Milnor donne dans son livre un argument pour se ramener au cas particulier (voir [Mi<sub>1</sub>], p. 88 à 91). Plus précisément, il montre que tout germe est équivalent à droite à un germe satisfaisant les conditions du cas particulier.

Nous donnerons au § 4 une interprétation (classique) de  $\delta_z$  en termes de « points doubles proches ».

Au § 5 nous donnerons une autre notion de genre d'une surface, que nous appellerons le grand genre. Elle permet de bien voir pourquoi  $\delta$  est la contribution locale au genre de  $C'$ .

## § 2. GENRES DE MURASUGI ET DE SEIFERT DES ENTRELACS

Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ . Il est bien connu depuis H. Seifert qu'il existe des surfaces compactes orientées  $U \subset S^3$ , dont le bord orienté est  $K$ . Dans ce qui suit, nous supposons toujours que  $U$  n'a aucune composante connexe close.  $U$  est appelée une surface de Seifert de  $K$ .

Le genre de Seifert de  $K$ , noté  $s(K)$ , est le minimum des genres des surfaces de Seifert de  $K$ .

Nous allons maintenant nous intéresser aux entrelacs orientés qui sont fibrés.

*Références*: J. Hillman [Hi]; D. Rolfsen [Ro<sub>1</sub>].

Les faits suivants sur les entrelacs fibrés sont classiques:

- a) Les entrelacs algébriques sont fibrés. (C'est le théorème de Milnor, voir [Mi<sub>1</sub>]).
- b) Les surfaces de Seifert d'un entrelacs fibré sont toutes connexes. En voici brièvement la raison: l'homologie en dimension 1 du revêtement cyclique infini associé à l'orientation de l'entrelacs est de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , puisque ce revêtement a le type d'homotopie de la fibre; s'il existe une surface de Seifert non connexe, l'homologie en question n'est pas de type fini.
- c) N'importe quelle surface de Seifert de  $K$ , de genre minimum, est isotope à une fibre de la fibration. Cela résulte essentiellement de la démonstration du théorème de fibration de J. Stallings (cf. [St<sub>1</sub>]). (Si on veut que l'isotopie reste fixe sur le bord, il faut utiliser F. Waldhausen [Wad].)
- d) Milnor démontre dans son théorème de fibration que, si  $L$  est un entrelacs algébrique, la fibre de la fibration est difféomorphe au morceau de courbe algébrique que nous avons appelé  $X$  au § 1. Par définition,

$$\dim_{\mathbf{Z}} H_1(X; \mathbf{Z}) = \mu$$

et donc, en vertu de c),  $s(L) = \frac{1}{2} [\mu - (r - 1)]$  pour n'importe quel entrelacs algébrique  $L$ .

Considérons maintenant  $S^3$  comme le bord de la boule  $B^4$ . Bien sûr, il existe des surfaces compactes orientées  $V \subset B^4$  telles que le bord orienté de  $V$  soit égal à un entrelacs orienté donné. A nouveau on impose qu'aucune composante connexe de  $V$  ne soit close. Pour faire joli, on peut toujours supposer que  $V$  est plongée proprement dans  $B^4$ , c'est-à-dire que  $\partial V = V \cap S^3$ .

Une surface telle que  $V$  est appelée surface de Murasugi de l'entrelacs orienté donné. Par définition, le genre de Murasugi est le minimum du genre des surfaces de Murasugi de l'entrelacs  $K$ . Nous le noterons  $m(K)$ .

Evidemment,  $m(K) \leq s(K)$  puisque toute surface de Seifert est une surface de Murasugi.

*Référence originale*: K. Murasugi [Mu].

*Commentaires.* 1) Si  $K$  est un nœud ( $r = 1$ ), les genres que nous avons définis ne dépendent pas de l'orientation. Plus généralement si on remplace l'entrelacs orienté  $K$  par l'entrelacs  $K'$  obtenu en changeant les orientations de toutes les composantes de  $K$ , alors  $K$  et  $K'$  ont mêmes genres de Seifert, respectivement de Murasugi. Cependant si on fait d'autres modifications sur les orientations, en général les genres changent.

2) Il est très facile de trouver des exemples où l'inégalité  $m(K) \leq s(K)$  est stricte. Pensez, par exemple, aux nœuds cobordants à zéro.

Une première relation entre le genre de Murasugi des entrelacs algébriques et la conjecture de Thom est donnée par la proposition suivante:

**PROPOSITION.** *Supposons qu'il existe un entrelacs algébrique  $K$  avec  $m(K) < s(K)$ . Alors la conjecture de Thom est fautive.*

D'où la conjecture (anonyme à ce qu'il nous semble (cf. [Kir, pb. 1.40]): « pour tous les entrelacs algébriques  $K$ , on a  $m(K) = s(K)$  ».

*Preuve de la proposition.* Soit  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction polynomiale avec  $f(0) = 0$ , possédant en 0 une singularité isolée, et dont l'entrelacs algébrique correspondant est équivalent à  $K$ .

Soit  $C$  la courbe projective plane obtenue en homogénéisant  $f$ . D'après l'argument donné par J. Milnor dans son livre [Mi<sub>1</sub>, p. 89] (et en utilisant le théorème de J. Mather) on peut supposer que  $C$  est irréductible. Soit  $d$  son degré.

L'argument de Milnor que nous avons reproduit à la fin du § 1 montre que la surface différentiable  $F \subset \mathbf{CP}^2$ , obtenue en ajoutant à  $\check{C}$  les morceaux de surface « de type  $X$  » au voisinage de chaque point singulier a un genre  $g$  donné par la formule:  $2g = (d-1)(d-2)$ .

Si  $K$  a, en vertu de l'hypothèse, un genre de Murasugi strictement plus petit que son genre de Seifert, choisissons une surface de Murasugi  $V$  réalisant le minimum du genre.

Construisons une surface différentiable  $F' \subset \mathbf{CP}^2$  en remplaçant, au voisinage de l'origine, le morceau de surface  $X$  par  $V$ . Le degré de  $F'$  est égal au degré de  $F$ . Mais le genre de  $F'$  est strictement plus petit que le genre de  $F$ . La surface  $F'$  serait donc un contre-exemple à la conjecture de Thom.

Nous donnons maintenant une autre relation classique entre la conjecture de Thom et le genre de Murasugi des entrelacs.

Soit un entier  $r \geq 1$ . Considérons le tore standard  $T$  dans  $S^3$ , et une courbe fermée simple  $\gamma$  sur  $T$  de type  $(1, 1)$ . Considérons l'entrelacs  $\Gamma$  obtenu en dessinant sur  $T$   $r$  courbes parallèles à  $\gamma$ :  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ . Orientons  $\gamma$  arbitrairement mais de façon définitive. Orientons chaque  $\gamma_i$  arbitrairement. Pour chaque entier  $i$ , avec  $1 \leq i \leq r$ ,  $\gamma_i$  est homologue sur  $T$  à  $\varepsilon_i \gamma$ , où  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Posons  $d = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i$ . Nous ne restreindrons pas la généralité de ce qui va suivre en supposant  $d \geq 0$ .

Bien sûr,  $r \equiv d \pmod{2}$ . Nous noterons  $\Gamma(r, d)$  l'un des entrelacs orientés ainsi obtenu. Ce sont des entrelacs de Hopf généralisés.

Un cas particulier intéressant est l'entrelacs  $\Gamma(d, d)$ . Il s'agit de l'entrelacs orienté associé à la singularité  $x^d - y^d = 0$ . (Point  $d$ -uple ordinaire.)

**PROPOSITION.** *La conjecture de Thom est vraie si et seulement si le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés  $\Gamma(r, d)$  est égal à*

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

*pour tout  $r$  et pour tout  $d$ .*

*Remarque.* Il n'est pas difficile de montrer que  $m(\Gamma(r, d)) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

et que  $m(\Gamma(r, d)) \leq m(\Gamma(d, d))$ .

Il serait agréable de montrer que  $m(\Gamma(r, d)) = m(\Gamma(d, d))$ . Dans ces conditions la proposition deviendrait : la conjecture de Thom est vraie si et seulement si

$$m(\Gamma(d, d)) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \text{pour tout } d \geq 1.$$

*Preuve de la proposition.* C'est une conséquence facile de la topologie de  $\mathbf{CP}^2$ . Rappelons que si  $F$  est une surface différentiable close, connexe, orientée dans  $\mathbf{CP}^2$ , plus généralement un 2-cycle entier, son degré est obtenu en calculant le nombre d'intersection  $F \cdot \mathbf{CP}^1$ . A l'aide d'une petite isotopie on peut toujours supposer que  $F$  rencontre  $\mathbf{CP}^1$  transversalement.

Désignons par  $\pi : E \rightarrow \mathbf{CP}^1$  le fibré en disques de dimension 2, normal à  $\mathbf{CP}^1$  dans  $\mathbf{CP}^2$ . L'intersection  $F \cap E$  se compose en général de  $r$  fibres orientées (par l'orientation de  $F$ ) :  $B_1, B_2, \dots, B_r$ . Comme le fibré  $E$  est orienté, pour chaque entier  $i, 1 \leq i \leq r$ , posons  $n_i = +1$  si l'orientation de  $B_i$  coïncide avec celle de  $E$  et posons  $n_i = -1$  sinon. On note alors  $\sum_{i=1}^r n_i = d$ .

D'autre part,  $(\mathbf{CP}^2 - \dot{E})$  est une boule de dimension 4, que nous notons  $B^4$ . Alors,  $S^3 = \hat{c}B^4 = \hat{c}E$ .

Posons  $F' = F \cap (\mathbf{CP}^2 - \dot{E}) = F \cap B^4$ . Le bord de  $F'$ ,  $\partial F' \subset \partial E = S^3$ , est une entrelacs orienté à  $r$  composantes. La description usuelle de la fibration de Hopf montre que c'est un entrelacs  $\Gamma(r, d)$ .

A partir de ces observations la fin de la démonstration est immédiate, si on remarque que  $F'$  est une surface de Murasugi pour cet entrelacs.

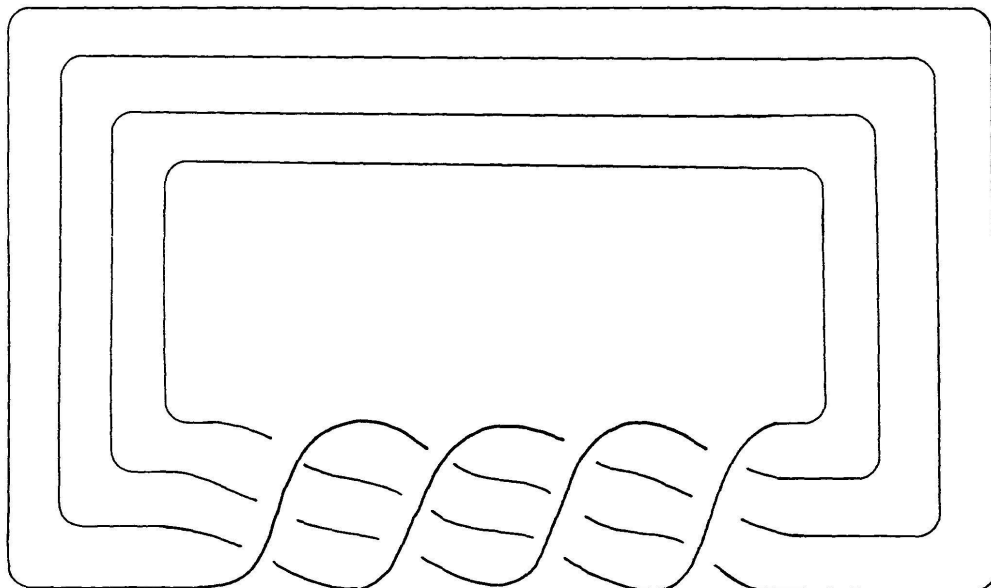


FIGURE 1

Entrelacs de Hopf généralisé (non orienté) à  $r = 4$  composantes connexes.

*Remarque.* Les entrelacs  $\Gamma(r, d)$  sont bien faciles à dessiner. Plaçons nous dans le groupe des tresses à  $r$  brins  $B_r$ , et considérons l'élément

$$\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{r-1},$$

puis l'élément  $\beta = \alpha^r$ . Sans les orientations, l'entrelacs de Hopf généralisé  $\Gamma$  correspond à la tresse fermée  $\hat{\beta}$ . Pour  $r = 1$  on a un cercle non noué et pour  $r = 2$  on a l'entrelacs de Hopf usuel. (Voir la figure 1 dans le cas  $r = 4$ .)

Avec une description aussi explicite, il est frappant que  $m(\Gamma(r, d))$  ne soit pas connu. Le § 6 fait le point sur ce que l'on sait actuellement.

### § 3. NOMBRE GORDIEN DES ENTRELACS

Dans ce paragraphe, nous abandonnons la géométrie algébrique plane, pour nous intéresser à un vieil invariant de la théorie des nœuds, aussi appelé « Überschneidungszahl » ou « unknotting number ». Commençons par la définition originale, légèrement mise au goût du jour.

Soit  $S_r$ , l'union disjointe de  $r$  cercles :  $S_r = \bigsqcup_{i=1}^r S_i^1$ . Une immersion

$$\varphi : S_r \hookrightarrow \mathbf{R}^2$$

sera dite générique, si ses seules singularités sont des points doubles où les deux brins se coupent transversalement.

Une immersion générique sera dite signée si, en chaque point double, on a choisi un brin positif et un brin négatif. Expliquons-nous : traditionnellement le brin positif est dessiné par un trait plein et le brin négatif est dessiné par un trait brisé.

Soit  $K$  un entrelacs dans  $\mathbf{R}^3$ . Soit  $\mathbf{R}^2$  un plan dans  $\mathbf{R}^3$  et choisissons une orientation de la normale au plan. La projection orthogonale  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  est une bonne projection pour  $K$ , si  $\pi|_K$  est une immersion générique. Une telle immersion est signée de façon naturelle, le brin positif en un point double étant celui qui se trouve le plus haut. Ceci a un sens puisque nous avons choisi une orientation de la normale au plan.

Réciproquement, une immersion signée détermine un entrelacs dans  $\mathbf{R}^3$ , dont la classe d'équivalence est bien définie. Nous dirons que cet entrelacs se trouve au-dessus de l'immersion signée.

LEMME. Soit  $\varphi : S_r \hookrightarrow \mathbf{R}^2$  une immersion générique. Alors, il existe un choix des signes aux points doubles tel que l'entrelacs qui se trouve au-dessus de