

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Boileau, Michel / Weber, Claude  
**Kapitel:** §6. Signatures  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### G. Les exemples de H. Wendt.

L'idée de comparer le nombre gordien d'un nœud avec son genre de Seifert est déjà dans l'article original de H. Wendt [We]. En fait Wendt avait exhibé des nœuds  $K$  (non fibrés!) de genre de Seifert  $s(K)$  et de gordien  $u(K) \geq 2s(K)$  (par exemple le nœud  $9_{35}$  dans la tabulation de Reidemester [Re]).

Nous donnons ici une généralisation des exemples de Wendt. Notons  $K_{2q+1}$ ,  $q \geq 1$ , le nœud de bretzel  $K(3, 3, \dots, 3)$ , qui est le bord de la surface constituée de deux disques reliés par  $2q + 1$  bandes tordues, et qui est représenté sur la figure 7.

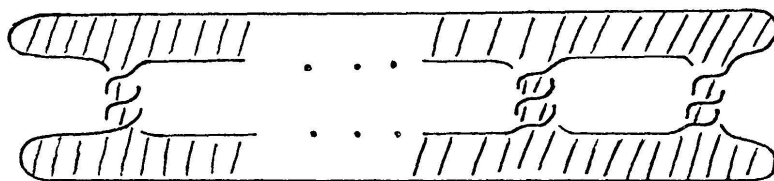


FIGURE 7

D'après T. Kanenobu [Ka] (voir aussi [Qa]), ce nœud n'est jamais fibré. On a :  $u(K_{2q+1}) \geq 2q = 2s(K_{2q+1})$ .

## § 6. SIGNATURES

Historiquement, à notre connaissance, deux voies ont été suivies par les topologues pour essayer de démontrer la conjecture de Thom.

La première consiste à utiliser ce que nous avons expliqué aux § 1 et 2 : minorer le mieux possible le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés. Nous avons vu au § 5 que la signature de l'entrelacs donne une première minoration. Une difficulté de cette approche est que la signature dépend en principe aussi bien de  $d$  que de  $r$ . L'introduction des signatures « tordues » et le théorème 3 ci-après, dus à A. Tristram, permettent d'obtenir des minoration qui ne dépendent que de  $d$ .

*Référence* : A. Tristram [Tri].

Ces signatures ont aussi été introduites par J. Levine dans le cas des nœuds, à la fin de son article sur le cobordisme, dans un but différent de celui de Tristram.

*Référence*: J. Levine [Lev].

La deuxième voie consiste à utiliser le théorème de la  $G$ -signature d'Atiyah-Singer, en l'appliquant à certains revêtements cycliques de  $\mathbf{CP}^2$ , ramifiés sur une surface différentiable de degré  $d$ . Ce fut le chemin suivi par W. C. Hsiang-R. H. Szczarba et par V. Rohlin.

*Références*: W. C. Hsiang-R. H. Szczarba [HS]; V. Rohlin [Rh].

Or, dans les deux cas (Tristram et Rohlin) les calculs que l'on effectue sont essentiellement les mêmes et donnent les mêmes bornes. La raison de ce phénomène est donnée par O. Viro qui a montré que, dans les deux cas, on calcule en fait le même invariant.

*Référence*: O. Viro [Vi].

Dans ce paragraphe, nous allons suivre l'approche par la théorie des entrelacs. Les bornes obtenues sont environ la moitié du nombre escompté dans la conjecture. Une excellente référence générale sur les signatures « tordues » des nœuds (i.e.  $r=1$ ) est donnée par l'article de C. Mc. Gordon [Gor]. Le cas des entrelacs présente quelques difficultés supplémentaires, liées à l'apparition de la dégénérescence. C'est pourquoi nous avons choisi une présentation plus proche de K. Murasugi et A. Tristram.

Nous commençons par quelques manipulations matricielles.

*Référence*: T. Matumoto [Ma].

Soit  $W$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbf{C}$ . Soit  $l: W \times W \rightarrow \mathbf{C}$  une forme sesquilinéaire. Aucune hypothèse de « symétrie » ou de non dégénérescence n'est faite sur  $l$ . Ceci sera utile pour les applications topologiques que nous avons en vue.

Soit  $\xi \in \mathbf{C}$ ,  $\xi \neq 1$ . Posons:  $l_\xi = \frac{1}{2} \{(1 - \bar{\xi})l + (1 - \xi)l^*\}$ , où  $*$  désigne la conjuguée-transposée.

LEMME 1.

a)  $l_\xi$  est une forme hermitienne, c'est-à-dire  $l_\xi^* = l_\xi$ .

b) Soit  $\omega = -\frac{1 - \xi}{1 - \bar{\xi}}$ . Alors  $l_\omega = \frac{1 - \operatorname{Re}\xi}{|1 - \xi|^2} l_\xi$ .

La preuve découle de calculs faciles.

Nous serons intéressés dans la suite à la dégénérescence et à la signature des formes  $l_\xi$ . (Par a) ceci a bien un sens). La partie b) du lemme 1 montre que nous ne perdons rien en ne considérant que les formes  $l_\omega$  avec  $|\omega| = 1$ , ce que nous ferons désormais.

Rappelons qu'il y a plusieurs façons de calculer la signature et la dégénérescence d'une forme hermitienne :

1. On diagonalise la forme en appliquant la méthode de la « completion du carré ». Si  $r_0$  désigne le nombre de zéros qui se trouvent dans la diagonale,  $r_+$  le nombre de réels positifs qui s'y trouvent et  $r_-$  celui des réels négatifs, alors :  $r_0$  est la dégénérescence et  $r_+ - r_-$  est la signature.

(Théorème de Sylvester des cours d'Algèbre linéaire)

*Notations* :  $\deg(l_\omega)$  et  $\text{sign}(l_\omega)$ .

2. On calcule le polynôme caractéristique  $\det(\text{id} + tl_\omega)$ . Alors  $r_0 =$  nombre de racines nulles,  $r_+ =$  nombre de racines positives, et  $r_- =$  nombre de racines négatives.

3. Les topologues citent souvent la méthode du § 3 du livre de B. Jones, qui n'est pas nécessairement la plus rapide dans les applications.

*Référence* : B. Jones [Jo].

LEMME 2. Si  $|\omega| = 1$ ,  $\omega \neq 1$ , on a :

$$l_\omega = \frac{1}{2} (1 - \bar{\omega}) \{l - \omega l^*\}$$

La preuve découle d'un calcul immédiat utilisant que si  $|\omega| = 1$ , on a :

$$\frac{1 - \omega}{1 - \bar{\omega}} = -\omega.$$

Ce lemme montre que les formes « à la J. Levine » fournissent la même famille d'invariants que les formes « à la A. Tristram ». Nous en aurons besoin parfois dans la suite, pour certains calculs.

Appliquons ce qui précède à la théorie des entrelacs. Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ . Soit  $U$  une surface de Seifert pour  $K$ , et soit  $A$  la forme de Seifert associée à  $U$ . Comme  $U$  n'est pas unique,  $A$  n'est pas un invariant de  $K$ . Mais on peut montrer que :

PROPOSITION 1. Si  $A$  et  $A'$  sont deux formes de Seifert pour  $K$ , on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini d'opérations du type suivant :

- i) Isométrie.
- ii) Nous utilisons une notation matricielle, qui est plus succincte.
- iiia) Passer de  $A$  à  $\bar{A}$  avec :

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{ou } \bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} & & & * & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & * & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ii) Passer de  $\bar{A}$  à  $A$ .

iii) Passer de  $A$  à  $\tilde{A}$ , avec:

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

iiib) Passer de  $\tilde{A}$  à  $A$ .

De plus, si on ne considère que des surfaces de Seifert connexes, les opérations i) et ii) suffisent.

Référence: C. Mc. Gordon-R. Litherland [GoL].

(Le passage-clé est dans la partie II du théorème 11).

Note. Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'aux entrelacs fibrés. Nous pourrions alors nous dispenser de la proposition 1 et du lemme 3 en utilisant que la fibre plongée est essentiellement unique. On définirait tout à partir de la forme de Seifert associée à la fibre.

LEMME 3. Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ . Soient  $A$  et  $A'$  deux formes de Seifert pour  $K$ , associées à deux surfaces de Seifert connexes de  $K$ . Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ , avec  $|\omega| = 1$  et  $\omega \neq 1$ . Alors:

$$\deg(A_\omega) = \deg(A'_\omega), \text{ et } \text{sign}(A_\omega) = \text{sign}(A'_\omega).$$

Bien sûr, un entrelacs possède toujours des surfaces de Seifert connexes. Par le lemme 3, nous pouvons définir la dégénérescence et la signature de  $K$  en  $\omega$ , que nous noterons:  $\deg_\omega(K)$  et  $\text{sign}_\omega(K)$ .

*Preuve du lemme 3.* Il suffit d'examiner le passage de  $A_\omega$  à  $\bar{A}_\omega$ . Or :

$$\bar{A}_\omega = \left[ \begin{array}{c|cc} & (1-\omega)a_1 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & (1-\omega)a_n & 0 \\ \hline (1-\bar{\omega})\bar{a}_1 \dots (1-\bar{\omega})\bar{a}_n & 0 & (1-\omega) \\ \hline 0 \dots 0 & (1-\bar{\omega}) & 0 \end{array} \right]$$

Un calcul immédiat montre que le polynôme caractéristique de  $\bar{A}_\omega$  est le produit de celui de  $A_\omega$  par  $[x^2 - 2(1 - \operatorname{Re}\omega)]$ . Ce dernier a une racine positive et une racine négative, ce qui achève la preuve.

*Remarque.* Si  $\omega = -1$ , la signature que nous venons de définir n'est rien d'autre que la signature de Murasugi dont nous avons parlé au § 5. Nous avons vu que dans ce cas, la nullité et la dégénérescence sont reliées par l'égalité :

$$\operatorname{nul}(K) = \operatorname{deg}_{-1}(K) + 1$$

(Ne pas oublier que nos surfaces de Seifert sont maintenant connexes).

Essentiellement pour ne pas rompre avec la tradition, introduisons un nouvel invariant, la nullité de  $K$  en  $\omega$ , définie par :  $\operatorname{nul}_\omega(K) = \operatorname{deg}_\omega(K) + 1$ .

Les deux théorèmes suivants sont essentiellement dus à A. Tristram [Tri].

**THÉORÈME 1.** *Soit  $\omega$  une racine  $p^i$ -ème de 1, avec  $p$  premier. Soient  $K$  et  $K'$  deux entrelacs orientés concordants. Alors :*

$$\operatorname{nul}_\omega(K) = \operatorname{nul}_\omega(K') \text{ et } \operatorname{sign}_\omega(K) = \operatorname{sign}_\omega(K').$$

*Attention!* Le théorème est faux si  $\omega$  n'est pas une racine  $p^i$ -ème de 1 avec  $p$  premier. C'est la raison pour laquelle A. Tristram n'envisage que des  $\omega$  qui sont des racines  $p$ -èmes de 1, la généralisation à  $p^i$  étant facile.

La définition d'une concordance (on dit aussi cobordisme) entre deux entrelacs orientés est la suivante :

*Définition.* Soient  $K^0$  et  $K^1$  deux entrelacs orientés, à  $r$  composantes. Désignons par  $(-K^1)$  l'entrelacs obtenu à partir de  $K^1$  en changeant l'orientation de chacune de ses composantes. Nous dirons que  $K^0$  et  $K^1$  sont concordants, s'il existe un plongement différentiable  $\Phi: S_r \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ , tel que:

que: (on rappelle que  $S_r = \bigsqcup_{i=1}^r S_i^1$ )

a)  $\Phi^{-1}(S^3 \times \{0\}) = S_r \times \{0\}$

$\Phi^{-1}(S^3 \times \{1\}) = S_r \times \{1\}$

b)  $\Phi|_{S_r \times \{0\}}$  (resp.  $\Phi|_{S_r \times \{1\}}$ ) soit une paramétrisation de  $K^0$  (resp. de  $K^1$ ).

c) le bord orienté de  $\text{Im}(\Phi)$  soit  $K^0 \times \{0\} \sqcup (-K^1) \times \{1\}$ .

**THÉORÈME 2.** Soit  $V$  une surface de Murasugi pour l'entrelacs orienté  $K$ . Soit  $\omega$  une racine  $p^i$ -ème de 1, avec  $p$  premier. Alors:

$$|\text{sign}_\omega(K)| + |\text{nul}_\omega(K) - b_o(V)| \leq r - b_o(V) + 2g(V)$$

(Conformément à nos notations, introduites précédemment,  $r$  désigne le nombre de composantes de  $K$ , et  $b_o(V)$  désigne le nombre de composantes connexes de  $V$ ).

*Remarque.* Comme  $\text{nul}_\omega(K) - b_o(V) \leq |\text{nul}_\omega(K) - b_o(V)|$ , le théorème 2 a pour conséquence l'inégalité  $|\text{sign}_\omega(K)| \leq r - \text{nul}_\omega(K) + 2g(V)$ , quelle que soit  $V$ .

Par conséquent, on obtient la formule plus commode:

$$|\text{sign}_\omega(K)| \leq r - \text{nul}_\omega(K) + 2m(K),$$

où  $m(K)$  désigne le genre de Murasugi de  $K$ .

Notre but est d'utiliser cette dernière formule pour minorer le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés, que nous avons notés  $\Gamma(r, d)$ . Pour obtenir des minoration qui ne dépendent que de  $d$ , nous allons utiliser un autre résultat de Tristram que nous présentons maintenant.

Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ , à  $r$  composantes:  $K_1, \dots, K_r$ . Donnons-nous également un plongement  $\varphi: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3$  d'un anneau tel que:  $\varphi(S^1 \times \{0\}) = K_r$  et  $\varphi^{-1}(K) = S^1 \times \{0\}$ .

Considérons l'anneau  $R = \varphi(S^1 \times [1/2, 1])$ . Orientons  $R$  et considérons le bord orienté  $\partial R$ . Définissons  $K_*$  comme étant l'entrelacs orienté  $K \cup \partial R$ . Bien sûr,  $K_*$  a  $(r+2)$  composantes. Soit  $K_{r+2} = \varphi(S^1 \times \{1\})$ .

Soit  $n = \left| \sum_{i=1}^r \mathcal{L}(K_{r+2}, K_i) \right| = \left| \mathcal{L}(K_{r+2}, K) \right|$ .

THÉORÈME 3. Soit  $\omega$  une racine  $s$ -ème de 1, avec  $s$  divisant  $n$ . Alors :

$$\text{sign}_\omega(K) = \text{sign}_\omega(K_*) \text{ et } \text{nul}_\omega(K) = \text{nul}_\omega(K_*) - 2.$$

Note. Dans le théorème 3,  $s$  n'est pas nécessairement puissance d'un premier.

On peut donner une démonstration de ces trois théorèmes en suivant les indications données par A. Tristram lorsque  $\omega^p = 1$ . Voir [BW].

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes précédents aux entrelacs de Hopf généralisés. Pour cela, nous avons besoin de savoir ce qui se passe pour les entrelacs du tore. Le théorème qui suit est cité très souvent dans la littérature, surtout en ce qui concerne la signature classique. Pour ce qui nous intéresse, les références utiles sont : R. Litherland [Lit]; T. Matumoto [Ma].

THÉORÈME 4. Soit  $K(p, q)$  l'entrelacs (orienté) du tore de type  $(p, q)$ . Soit  $x$  un nombre réel,  $0 < x < 1$ , et soit  $\omega = \exp(2\sqrt{-1}\pi x)$ . Notons :  $r_0$  : le nombre de couples d'entiers  $(i, j)$ , avec  $0 < i < p$ ,  $0 < j < q$ , et tels que  $\frac{i}{p} + \frac{j}{q} \equiv x \pmod{1}$ ;

$r_-$  : le nombre de ces couples  $(i, j)$ , tels que  $x - 1 < \frac{i}{p} + \frac{j}{q} < x \pmod{2}$ ;

$r_+$  : le nombre de ces couples  $(i, j)$  tels que  $x < \frac{i}{p} + \frac{j}{q} < x + 1 \pmod{2}$ .

Alors,  $\text{nul}_\omega(K(p, q)) = r_0 + 1$  et  $\text{sign}_\omega(K(p, q)) = r_+ - r_-$ .

Nous allons esquisser une preuve de ce théorème en suivant T. Matumoto [Ma]. La clé de la preuve est dans la proposition suivante.

PROPOSITION. Soit  $K$  un entrelacs du tore, de fibre  $U$  et de forme de Seifert  $A$ . Alors, il existe une base de  $H_1(U; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$  telle que l'extension sesquilinéaire  $l$  de  $A$  à  $H_1(U; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$  soit diagonale dans cette base.

Voici quelques points de repères.

Soit  $a$  un entier positif. On montre tout d'abord que l'extension sesquilinéaire de la forme de Seifert associée à la singularité  $z^a = 0$  se diagonalise. La matrice diagonale est :





Le théorème 5 découle d'un calcul un peu long mais sans aucune difficulté qui donne les signatures tordues des entrelacs  $\Gamma(d, d)$ , grâce au théorème 4.

On choisit  $\omega = -1$  si  $d$  est pair, et  $\omega = \exp[2\sqrt{-1}\pi(p^i - 1)/2p^i]$  si  $d$  est impair et  $d = p^i d'$  avec  $p$  premier.

On applique ensuite les théorèmes 2 et 3 pour étendre la minoration aux entrelacs  $\Gamma(r, d)$ .

En appliquant l'argument classique de transversalité développé au § 2 nous obtenons ainsi une preuve du théorème de Rohlin et Hsiang-Szczarba, dans le cas de  $\mathbf{CP}^2$ .

**THÉORÈME ([Rh], [HS]).** *Soit  $F$  une surface différentiable, close, connexe, orientable dans  $\mathbf{CP}^2$ . Supposons que  $F$  est de degré  $d$ . Alors le genre de  $F$  est au moins égal à:  $\frac{d^2 - 4}{2}$  si  $d$  est pair et à  $\frac{d^2 - 4}{4} - \left(\frac{d'}{2}\right)^2$  si  $d$  est impair,  $d = p^i d'$ , avec  $p$  premier.*

*Note.* Comme nous n'avons pas pris de précaution quant à l'orientation globale des entrelacs, les calculs précédents montrent plutôt que la valeur absolue des signatures est égale au nombre indiqué.

## § 7. QUELQUES PROBLÈMES LIÉS AU NOMBRE GORDIEN

Le but de ce paragraphe est de mentionner et de commenter quelques problèmes liés au nombre gordien d'un entrelacs mais qui ne sont pas directement rattachés aux problèmes de R. Thom et de J. Milnor.

A-1) Dès qu'on définit un invariant des entrelacs, il est important de connaître son comportement par rapport à la somme connexe. Il est alors naturel de poser la question suivante (cf. Knot theory, Proceedings Plans-sur-Bex [Hau]): « le nombre gordien est-il additif pour la somme connexe: c'est-à-dire a-t-on  $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$ ? »

On vérifie aisément que:  $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$ .

L'exemple de la figure 8, où l'on considère la somme connexe du nœud de trèfle droit avec le nœud de trèfle gauche, montre que le nombre gordien de ce nœud, qui est 2 par l'inégalité de Wendt (cf. [QV]), peut-être atteint aussi bien en dénouant chaque facteur de la somme connexe qu'en ne respectant pas cette somme connexe.

2) Un cas particulier du problème précédent a reçu beaucoup d'attention (cf. [Lic<sub>1</sub>], [GLa<sub>1</sub>]). Il reste toujours ouvert: « les entrelacs de nombre