

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER  
REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER  
ORTHOGONALEN GRUPPE

**Autor:** Rummler, Hansklaus

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55087>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$SO(n)$  zu untersuchen und zu zeigen, dass diese Kurve die kürzeste Verbindung zwischen  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{1} + 2B_{ij}$  darstellt. Sei dazu  $V$  eine beste orthogonale Approximation von  $M_{ij}$ . ( $V$  ist nicht eindeutig, da  $M_{ij}$  nicht regulär ist.) Dann besitzt  $M_{ij}$  die polare Zerlegung  $M_{ij} = VT$ , wobei  $T$  symmetrisch ist und  $T^2 = M_{ij}^* M_{ij} = M_{ij}$  gilt, also

$$\begin{aligned} \|M_{ij} - V\|^2 &= \|T - \mathbf{1}\|^2 = \|T\|^2 - 2\operatorname{tr}T + \|\mathbf{1}\|^2 \\ &= \|M_{ij}\|^2 - 2\operatorname{tr}T + \|\mathbf{1}\|^2 = n - 2 - 2\operatorname{tr}T + n \\ &= 2n - 2 - 2\operatorname{tr}T. \end{aligned}$$

Numerieren wir die Standardbasis des  $\mathbf{R}^n$  in geeigneter Weise um, so ist

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $T_1 \in O(n-2)$  symmetrisch, und damit  $\operatorname{tr}T \leq n-2$ , wobei Gleichheit genau für  $T_1 = \mathbf{1}$  gilt. Folglich ist  $\|M_{ij} - V\|^2 \geq 2n - 2 - 2n + 4 = 2$ , und jeder Weg in  $SO(n)$  zwischen  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{1} + 2B_{ij}^2$  verläuft ausserhalb der offenen Kugel vom Radius  $\sqrt{2}$  um  $M_{ij}$  in  $\mathbf{R}^{n \times n}$  und ist damit mindestens so lang wie der Kreisbogen  $(\exp(tB_{ij}))_{0 \leq t \leq \pi}$ .

#### LITERATUR

- [1] BOTT, R. Lectures on Morse Theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc.* 7 (1982), 331-358.
- [2] EHRESMANN, C. Sur la topologie des groupes simples clos. *C. R. Acad. Sci. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
- [3] HALMOS, P. R. *Finite-dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Princeton, N. J.: Van Nostrand (1958).
- [4] JEGER, M. *Einführung in die Kombinatorik*, Bd. 2, Stuttgart: Klett (1976).

(Reçu le 5 août 1985)

Hansklus Rummler

Institut de Mathématiques  
de l'Université de Fribourg  
CH-1700 Fribourg