Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 1.2. Nature des hypothèses

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

voisinage de x_0? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0, ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \in \{1, ..., n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathscr{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.

A cette algèbre de Lie sont associées des variétés appelées variétés intégrales de $\mathscr{L}$. La variété $\mathscr{V}$ sera une telle variété si pour tout $x \in \mathscr{V}$, l'espace vectoriel $T_x\mathscr{V}$ coïncide avec le sous-espace de $T_x\mathbf{R}^n$ défini par $\mathscr{L}$. L'existence de variétés intégrales de $\mathscr{L}$ n'est pas automatique, et nous devrons la supposer pour obtenir certains résultats. Nous introduisons donc deux conditions « techniques » destinées à nous fournir de telles variétés intégrales, ou des variétés se comportant un peu comme des variétés intégrales.

Nous dirons que la propriété (R) est vérifiée dans l'ouvert Ω si par tout point de Ω passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$; Sussmann [25] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété soit vérifiée; rappelons que c'est classiquement le cas dans chacune des deux situations suivantes (qui constituent des critères aisément vérifiables sur un champ L donné):

1. Lorsque le rang de $\mathscr{L}$ est constant dans Ω (théorème « de Frobenius », cf. Sternberg [23, p. 132]).
2. Lorsque les coefficients a_j de L sont analytiques dans Ω (théorème de Nagano [16]).

Nous dirons que L vérifie la condition (P) dans $\omega \subset \Omega$ s'il existe des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un ouvert v de $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que $\omega \subset v \times]-T, T[\subset \Omega$, que L s'écrive

$$L = a(y, t)\left[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y\right] \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{dans} \quad v \times]-T, T[\,,$$

et que pour tout $y \in v$, il existe un vecteur unitaire $d(y) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que

$$b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y) \qquad \text{pour tout} \qquad t \in]-T, T[\,.$$

Cette condition (P) a été introduite par Nirenberg et Trèves [17] pour étudier la résolubilité locale de L, et ces auteurs ont montré que si (η, τ) était un autre choix de coordonnées locales tel que

$$L = \alpha(\eta, \tau)\left[\partial_\tau + i\beta(\eta, \tau) \cdot \partial_\eta\right], \qquad \beta \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}^{n-1}\,,$$

l'existence d'un vecteur $d(y)$ tel que $b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y)$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\delta(\eta)$ tel que $\beta(\eta, \tau) = |\, \beta(\eta, \tau)\,|\, \delta(\eta)$. Nous verrons au paragraphe 1.5 comment trouver à partir d'un champ L non dégénéré des coordonnées locales dans lesquelles $L = a(\partial_t + ib \cdot \partial_y)$, b à valeurs dans $\mathbf{R}^{n-1}$, si bien que par cette propriété d'invariance, la condition (P) est aisément vérifiable sur un champ L donné.

Le lecteur remarquera que si L vérifie la condition (P) dans ω, alors $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ dans $\bar{\omega}$; cependant, la condition (P) dit plus que cela: elle implique l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

THÉORÈME 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \ \text{et} \ \operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (L+c_0+a)\, u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \text{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

THÉORÈME 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \ \text{et} \ \operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2)\qquad \begin{cases} (L+c_0)\, u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega, \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme